

Úlohy k cvičení 7

Spojitosť a Darbouxova vlastnost

Definice. Necht' I je interval. Řekneme, že funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má Darbouxovu vlastnost, pokud pro každé $a, b \in I$, $a < b$ platí, že $f([a, b])$ obsahuje celý uzavřený interval s krajními body $f(a)$ a $f(b)$.

- Sestrojte funkci $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ takovou,
 - že f je spojitá na $(0, 1]$, ale nelze rošířit na spojitou funkci na $[0, 1]$;
 - * že f je spojitá a omezená na $(0, 1]$, ale nelze rošířit na spojitou funkci na $[0, 1]$;
 - ** že f má Darbouxovu vlastnost, ale f není spojitá;
 - *** že f má Darbouxovu vlastnost, ale f není spojitá na žádném intervalu.
- Včera v 0:00 ráno jsme naměřili teplotu 5 stupňů Celsia. Dnes v 0:00 jsme opět naměřili teplotu 5 stupňů Celsia.
 - Ukažte, že někdy včera před polednem se dá najít čas, ve kterém byla stejná teplota jako o 12 hodin později. (Můžete využívat, že teplota závisí spojitě na čase.)
 - * Lze vždy najít čas takový, že bude stejná teplota o 8 hodin později?
 - ** Lze vždy najít čas takový, že bude stejná teplota o $\sqrt{2}$ hodin později?
- * Necht' $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající funkce s Darbouxovou vlastností. Je f nutně spojitá?
- * Necht' $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce splňující $f(0) = f(1) = 0$. Musí graf funkce f nutně protnout úsečku spojující body $(0, 1)$ a $(1, -1)$?