Úlohy k cvičení 5

Rekurentně zadané posloupností, řady.

1. Ukažte, že následující rekurentně zadané posloupnosti (a_n) mají limity a spočtěte je.
   (a) $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x - a_n)^2$ pro $0 \leq x \leq 1$.
   (b) $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$.
   (c) $a_1 = c$, kde $c \in (0, \infty)$, a $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$.
   (d)* $a_1 = c$, kde $c \in (0, \infty)$, a $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.
   (e)* $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$.
   (f)* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$.
2. Spočtěte následující limity:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$.
   (d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor xk \rfloor$ pro x reálné.
   (e)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. Sečtěte řady:
   (a) $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{6^n}$.
   (b)* $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1}$.
   (c)* $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
   (d)* $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+5)}$.
   (e)* $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.
   (f)*(*) $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.