

Úlohy k cvičení 3

Limity posloupností.

Definice. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

(i) má *vlastní limitu* a , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon.$$

(ii) má *nevlastní limitu* ∞ , pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: a_n > K.$$

V řešení úloh (zejména u druhé úlohy) můžete využívat, že každá shora omezená podmnožina reálných čísel má reálné supremum a každá zdola omezená podmnožina reálných čísel má reálné infimum. Dále můžete používat, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $a < b$ existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$.

1. U následujících posloupností dokažte z definice limity, že platí:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{10} n = \infty$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$,

(e)* $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ (můžete využívat nerovnost $\sin x \leq x$ pro x kladné).

2. Spočtěte následující limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos (-1)^n$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^n$,

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$,

3. Spočtěte následující limity.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2-1}\right) \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n+2}{3n^2+1}$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+2}{n^3-1}$,

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-10}{1-10n^3}$,

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n+2}{-2n^2+4}$,

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1},$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{20}(-3n+2)^{30}}{(4n-5)^{50}},$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+7^n}{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}.$$

4. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení. Předpokládejte, že limity všech posloupností v těchto tvrzeních existují.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a.$$

$$(c) \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$(d) \forall n \in \mathbb{N}: a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$