

Úlohy k cvičení 2

Výroky nad (převážně) reálnými čísly, suprema a infima.

Definice. Je-li $M \subseteq \mathbb{R}$, potom *supremum* množiny M je nejmenší takové reálné číslo s , že $s \geq m$ pro každé $m \in M$. Pokud M není shora omezená, potom supremum M definujeme jako ∞ . Dále *infimum* M je největší takové reálné číslo i , že $i \leq m$ pro každé $m \in M$. Pokud M není zdola omezená, potom infimum M definujeme jako $-\infty$.

V řešení úloh (zejména u druhé úlohy) můžete využívat, že každá shora omezená podmnožina reálných čísel má reálné supremum a každá zdola omezená podmnožina reálných čísel má reálné infimum. Dále můžete používat, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $a < b$ existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$.

1. U každého z následujících výroků nejprve zformulujte jeho negaci. Poté rozhodněte, zdali platí původní výrok, nebo jeho negace.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x^2 + y^2 \geq 0$,

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: x < n$,

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: (x \geq n) \vee (x < n + 1)$,

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z}: (x \geq n) \vee (x < n + 1)$,

(e) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon$,

(f) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$,

(g) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$,

(h) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{R}: z > x \Rightarrow y < z$,

(i) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$.

2. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

3. V oboru reálných čísel určete suprema a infima následujících množin (pokud existují). Jsou to zároveň maxima či minima těchto množin?

(a) $\{1/n: n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{-1/n: n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $\{0, 3; 0, 33; 0, 333; 0, 3333; \dots\}$,

(d) $\{q \in \mathbb{Q}: q < \sqrt{3}\}$,

(e) $\{\sin x: x \in [0, 2\pi)\}$,

(f) $\{\sin x: x \in (0, 2\pi)\}$,

(g) $\{\sin x: x \in (0, \pi)\}$,

(h) $\{1 - 1/n^2: n \in \mathbb{N}\}$,

(i) $\{\frac{z-1}{z}: z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

(j)* $\{\frac{m}{m+n}: m, n \in \mathbb{N}\}$

(k) $\{\frac{n+(-1)^n}{n}: n \in \mathbb{N}\}$

(l) $\{n^{(-1)^n}: n \in \mathbb{N}\}$

- (m) $\{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$,
- (n)* $\{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$,
- (o) $\{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$,
- (p) $\{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$,
- (q) $\{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$,
- (r)* $\{5^{(-1)^j 3^k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$,
- (s) $\{\cos((1 + 1/n)\pi) : n \in \mathbb{N}\}$,
- (t)* $\{\cos((1 + 1/n)\pi) : n \in \mathbb{N}, n \text{ sudé}\}$,
- (u) $\{\cos((1 + 1/n)\pi) : n \in \mathbb{N}, n \text{ liché}\}$,
- (v)*** $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ (můžete využívat, že π je iracionální číslo).