Úlohy k cvičení 10

Průběh funkcí, Taylorův polynom

Definice. Nechť f je funkce definovaná na otevřeném intervalu I a $b \in I$. Předpokládejme, že f má v b vlastní n-tou derivaci. Potom *Taylorův polynom funkce f v bodě b řádu n* je definován jako

$$T_n^{f,b}(x) := f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n.$$

1. Vyšetřete průběh následujících funkcí včetně určování asymptot a limit v krajních bodech definičního oboru (nemusíte vyšetřovat konvexitu). Načrtněte jejich grafy.
   (a) $f(x) = \sin(\sin x)$;
   (b) $f(x) = \sin(\pi \sin x)$;
   (c) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ (u této varianty extrémy nejspíš neurčíte přesně, pokuste se alespoň odhadnout jejich polohu);
   (d) $f(x) = 2x^2(x - \sqrt{x^2-1})$;
   (e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x|+2/(3\pi)}\right)$.
2. Vyšetřete průběh následujících funkcí včetně určování asymptot a limit v krajních bodech definičního oboru a konvexity. Načrtněte jejich grafy.
   (a) $f(x) = x^3 - 12x + 16$;
   (b) $f(x) = \arcsin(\cos x)$;
   (c) $f(x) = \ln^3(x)$;
   (d) $f(x) = e^{-x^2}$;
   (e) $f(x) = \ln(4 \cdot 3^x + 2)$;
   (f) $f(x) = \ln(|\operatorname{tg} x|)$;
   (g) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$;
   (h) $f(x) = x^2 e^{-x}$;
   (i) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$;
   (j) $f(x) = x - \ln(x+1)$;
   (k) $f(x) = x \cdot e^{-|x-1|}$.
3. Napište Taylorův polynom v nule (stupně např. 5) pro následující funkce.
   (a) e^x;
   (b) $\ln(x+1)$;
   (c) $\sin x$;
   (d) $\cos x$;
   (e) $(1+x)^a$ pro $a \in \mathbb{R}$.
4. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity.
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - x^2 \ln(1+\frac{1}{x}))$.