

# Úlohy k cvičení 1

## Množiny, funkce, spočetnost

**Definice.** Množina  $X$  je *spočetná* pokud existuje prostá funkce  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ . V opačném případě je  $X$  *nespočetná*.

- O následujících množinách ukažte, že jsou spočetné:
  - $\mathbb{Z}$
  - $\mathbb{N}^2$
  - $\mathbb{Q}$
- S využitím faktu, že  $\mathbb{R}$  je nespočetná, ukažte, že množina iracionálních čísel  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  je též nespočetná.
- Nechť  $f: X \rightarrow Y$  je libovolné zobrazení a  $A, B \subseteq X$  jsou libovolné množiny.
  - Jaký je vztah mezi množinami  $A$  a  $f^{-1}(f(A))$ ?
  - Jaký je vztah mezi množinami  $f(A \cup B)$  a  $f(A) \cup f(B)$ ?
  - Jaký je vztah mezi množinami  $f(A \cap B)$  a  $f(A) \cap f(B)$ ?
- Najděte funkci, která zobrazuje:
  - Interval  $(0, 1)$  na interval  $(0, \infty)$ .
  - Interval  $(0, 1)$  na interval  $(-\infty, \infty)$ .
  - Interval  $(0, 1)$  na interval  $[0, 1]$ .
  - Interval  $[0, 1]$  na interval  $(0, 1)$ .
  - Interval  $[0, 1]$  na interval  $[0, \infty)$ .
  - Interval  $(0, \infty)$  na interval  $(0, 1)$ .
- Mějme množiny  $X$  a  $Y$  a funkce  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow X$  takové, že  $g(f(x)) = x$  pro každé  $x \in X$  a  $f(g(y)) = y$  pro každé  $y \in Y$ . Ukažte, že  $f$  i  $g$  jsou bijekce.
- Charakterizujte zobrazení  $f: X \rightarrow Y$ , pro která platí:
  - $f^{-1}(f(A)) = A$  pro každé  $A \subseteq X$ .
  - $f(f^{-1}(B)) = B$  pro každé  $B \subseteq Y$ .
- Najděte bijekci mezi
  - $(0, 1)^*$  a  $[0, 1]$ .
  - $\mathbb{N}^*$  a  $\mathbb{Q}$ .
  - $\mathbb{R}^{**}$  a  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  (nebo alespoň prostou funkci z  $\mathbb{R}$  do  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  a prostou funkci z  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  do  $\mathbb{R}$ ).
- $\mathbb{R}^{**}$  Nechť  $X$  je množina. Ukažte, že neexistuje prostá funkce  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ .
- Nakreslete co nejpřesněji grafy následujících funkcí:
  - $\cos x, \cos 2x, \cos(x + \pi), \cos(2x + \pi)$ .
  - $||x - 1| - 1|, ||x - 1| - 1|^2, ||x - 1|^2 - 1|$ .
  - $\sin |x|, |\sin x|$ .

(d)  $\sqrt{1-x^2}$ .

(e)  $\sin x \cos x$ .

(f)\*  $\sin x^2, \sin 1/x, \ln \sin x, \ln \ln \sin x$ .

(g)\*  $x + 1/x$ .