

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nechtě $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti takové, že existuje n_0 takové, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro každé $n \geq n_0$. Předpokládejme, že existuje limita první a třetí posloupnosti a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

pro L reálné nebo $\pm\infty$. Dokažte, že existuje limita druhé posloupnosti a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Úloha 2: Pomocí lemmatu o sevřené posloupnosti spočítejte následující limity.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}$, pro $k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}$, pro $q \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

Úloha 3: Spočítejte následující limity.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(\sqrt{n-3} - n))$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n})$

Úloha 4: V závislosti na parametrech určete následující limity

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, kde $a > 0$ je zadané reálné číslo.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, kde $0 < a < 1$ a $0 < b < 1$ jsou zadaná reálná čísla.

Úloha 5: Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + n \sin n}{n \cos 3n + (2n + \sin n)^2}$

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n^2 \pi) + \cos((n+1)\pi)$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\cos(n\pi)}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$

Úloha 6: Spočítejte následující limity

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, kde $a, b, c > 0$ jsou zadaná reálná čísla.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

Úloha 7: Ukažte, že posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ klesající. Odtud ukažte, že tyto posloupnosti mají stejnou limitu.

Úloha 8: Nalezněte limity

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n+7}$