Řešení zápočtového testu č. 3 (31. 5. 2023)

1: Limita

Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}-1\right)$$

(10 bodů)

Použijeme vzorec $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}-1\right)\frac{\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}+1}{\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}-1}{\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}+1}=\lim_{n\to\infty}-\frac{\sin(n!)}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}+1}=0,$$

kde jsme v posledním kroku použili Větu o dvou policajtech s odhadem $-1\leq\sin(n!)\leq 1$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{\pm 1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}}+1}\overset{\text{VoAL}}{=}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}-\frac{\pm 1}{\sqrt{n}}=0.$$

2: Řada

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

(10 bodů)

Řada splňuje nutnou podmínku konvergence, takže má šanci konvergovat. Pokud bychom chtěli použít např. podílové kritériu, tak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n)}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+0,$$

tedy nevíme nic.

Zkusíme aplikovat integrální kritérium, pro které musíme ověřit, že je daná posloupnost klesající. Pokud zadefinujeme přirozené prodloužení do reálných čísel

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Pokud spočteme derivaci

$$f'(x)=\frac{x-2\ln(x)x}{x^4}=\frac{1-2\ln(x)}{x^3},$$

což je záporné pro $x>e^{\frac{1}{2}}$, tedy kde nás to zajímá.

Intuitivně bychom čekali, že čada bude konvergovat. To je protože $\sum\frac{1}{n^2}$ konverguje a $\ln(n)$ roste pomaleji než libovolný polynom. Pokud použijeme integrální kritérium, dostaneme horní odhad

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}\leq\int_2^{\infty}\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}x-1=y\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{array}\right\}=\int_1^{\infty}\frac{\ln(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y=\left\{\begin{array}{c}\ln(y)=z\\ \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\end{array}\right\}=\int_0^{\infty}ze^{-z}\,\mathrm{d}z\overset{pp.}{=}$$

$$\left[-ye^{-y}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-e^{-y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-y}\,\mathrm{d}y=\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty}=1.$$

Řada tedy konverguje.

3: Průběh funkce

Vyšetřete průběh funkce (tedy minimálně definiční obor, monotonii, konvexitu, asymptotické chování) pro

$$f(x) = (x^2 - x)e^{|x|}$$

a načrtněte její graf.

(10 bodů)

Rozdělme diskuzi na dvě části podle absolutní hodnoty

$$f(x) = x(x-1)e^{|x|} = \begin{cases} (x^2 - x)e^x, & x \geq 0, \\ (x^2 - x)e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Spočteme první a druhou derivaci

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2 + x - 1)e^x, & x \geq 0, \\ -(x^2 - 3x + 1)e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} x(x+3)e^x, & x \geq 0, \\ (x^2 - 5x + 4)e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Nyní najdeme na příslušných intervalech extrémy

$$0 = f'(x) = \begin{cases} (x^2 + x - 1)e^x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -(x^2 - 3x + 1)e^{-x} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \emptyset \end{cases}$$

a inflexní body

$$0 = f''(x) = \begin{cases} x(x+3)e^x \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ (x^2 - 5x + 4)e^{-x} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \emptyset \end{cases}$$

Odtud tedy plyne, že na $\mathbb{R}^+$ je fce konvexní a má jedno lokální minimum v $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$, zatímco na záporné poloose je fce konvexně klesající.

Asymptotické chová jde snadno zjistit pomocí limit

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)e^x = \infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - x)e^{-x} = \infty.$$

Konečně určeme průsečíky s osami, které jsou opět snadné

$$0 = f(x) = (x^2 - x)e^{|x|},$$
$$0 = x(x-1),$$
$$x = 0, 1.$$

Odtud jde snadno načrtnout obrázek.

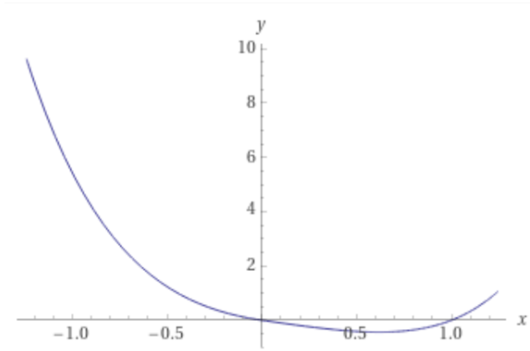
4: Délka křivky

Najděte délku křivky *asteroidu*, neboli křivky zadané parametricky pomocí

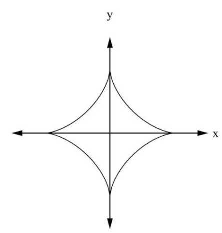
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

viz ilustrační obrázek.

(10 bodů)



Obrázek 1: Graf $f(x) = (x^2 - x)e^{|x|}$.



Obrázek 2: Graf $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Upravme parametricky zadanou fci a vyádřeme z ní y, neboli

$$y_{\pm} = \pm \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

kde rozdílná znamenénka odpovídají tomu, že uvažujeme horní, nebo spodní část grafu.

Délka křivky je daná pomocí vzorce

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde v našem případě je obrazec symetrický a tak můžeme uvažovat délku jen jednoho dílku a tu vynásobit čtyřmi. To odpovídá tomu, že $a = 0, b = 1$ a $f = y_+$.

Derivace y_+ je

$$y'_+ = \frac{3}{2}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Odtud tedy

$$l = 4\int_0^1 \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} - 1}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = 4\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = 6.$$