Zápočtový test č. 2 (26. 5. 2023)

1: Limita

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan(x)} - \ln(1+x) - 1}{5x^2}.$$

(10 bodů)

Způsoby řešení jsou dva - opakované použití l'Hospitala, nebo Taylorův rozvoj. Ukažme ten druhý, protože první je přímočarý. Protože vejmenovateli je $\sim x^2$, stačí všechny rozvoje dělat do druhého řádu.

Z užitečných vztahů

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Odtud můžeme vnořením získat řadu

$$\begin{aligned} e^{\arctan(x)} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan(x)} - \ln(1+x) - 1}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1}{5x^2} = \frac{1}{5}.$$

2: Řada

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

(8 bodů)

Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} = 1.$$

3: Průběh funkce

Vyšetřete průběh funkce (tedy minimálně definiční obor, monotonii, konvexitu, asymptotické chování) pro

$$f(x) = x^x$$

a načrtněte její graf.

(12 bodů)

Z tvaru fce vidíme, že $D_f = \mathbb{R}^+$. Diskuzi začněme zkoumáním chování fce na hranicích definičního oboru, tedy

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^x = \infty, \\
&\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1.
\end{aligned}
$$

Nyní spočteme první a druhou derivaci

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{x\ln(x)}\right)' = (\ln(x)-1)e^{x\ln(x)}, \\
f''(x) &= \frac{1}{x}e^{x\ln(x)} + (\ln(x)-1)^2 e^{x\ln(x)}.
\end{aligned}
$$

Hledání extrémů vede na rovnici

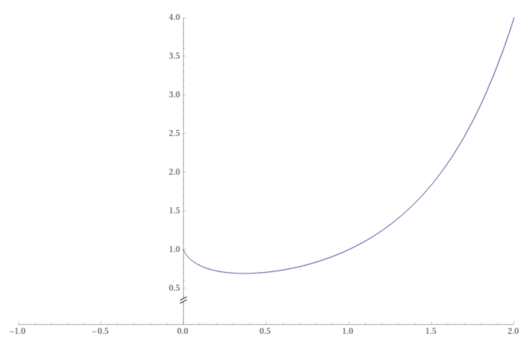
$$0 = f'(x) = \ln(x) - 1 \Rightarrow x = e,$$

zatímco pro inflexní body dostáváme

$$0 = f''(x) = \frac{1}{x} + (\ln(x)-1)^2 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Víme tedy, že f je klesající ($f'(x) < 0$ pro $x < e$) a má extrém v $x = e$ a dále je rostoucí. Inflexní body nemá, protože druhá derivace je vždy kladná.

S těmito informacemi jde už snadno načrtnout zkoumanou fci.



Obrázek 1: Graf $f(x) = x^x$.

4: Určitý integrál

Spočtěte

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x.$$

(10 bodů)

Nejprve zkusíme jako vždy aplikovat substituci. Zde se nabízí udělat substituci za $\sin(x)$, protože potom

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \sin(x) = y \\ \cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-y^2} \,\mathrm{d}y,$$

což je příklad na parciální zlomky.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-y^2} \,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{1+y} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\ln(1+y) + \ln(1-y)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \ln(3).$$