Řešení zápočtového testu č. 1 (23. 5. 2023)

1: Limita posloupnosti

Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right).$$

(10 bodů)

Máme dě možnosti jak postupovat. Zaprvé jde využít vzorec

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

V takovém případě dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}.$$

Alternativní způsob je použít Heineho větu a převést příklad na limitu fce.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right).$$

Následně uděláme substituci, abychom mohli řešit limitu u nuly, tedy $x=1/y$. Odtud tedy dostaneme exkvivalentní příklad

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\sqrt[3]{1-y}}{y},$$

který jde snadno vyřešit l'Hospitalovým pravidlem, nebo Taylorem. Například první způsob dává

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\sqrt[3]{1-y}}{y}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{3(1-y)^{\frac{2}{3}}}}{1}=\frac{1}{3}.$$

2: Průběh funkce

Vyšetřete průběh funkce (tedy minimálně definiční obor, monotonii, konvexitu, asymptotické chování) pro

$$f(x)=x^3e^{-x^2}$$

a načrtněte její graf.

(12 bodů)

Definiční obor fce je $D_f=\mathbb{R}$. Fce je zároveň lichá, protože $f(-x)=(-x)^3e^{-(-x)^2}=-f(x)$. Začněme asymptotickým chováním

$$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x^2}=0,$$

Kde buď použijeme fakt, že exponenciála roste rychleji než polynom, nebo uděláme 3x l'Hospitala na výraz x^3/e^{x^2}.

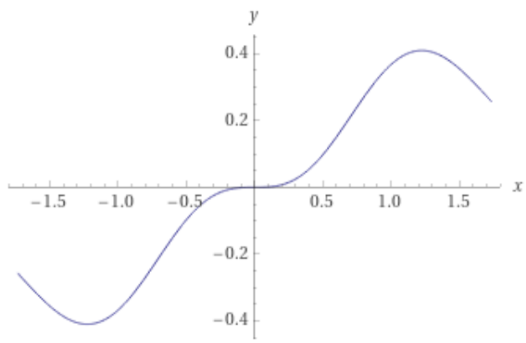
Nyní spočtěme první a druhou derivaci

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2e^{-x^2} + x^3(-2x)e^{-x^2} = (3-2x^2)x^2e^{-x^2}, \\ f''(x) &= 4x^3e^{-x^2} + (3-2x^2)2xe^{-x^2} + (3-2x^2)x^2(-2x)e^{-x^2} \\ &= 2x(2x^4 - 7x^2 + 3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

.

Odtud tedy extrémy jsou v $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ a inflexní body jsou $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{3}$. Protože $f(x) \overset{x\to\infty}{\to} 0$ a $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, pak by měla být fce rostoucí na $x \in (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$. To opravdu vychází a je klesající na $x \in (\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$.

Pomocí těchto informací už snadno načrtneme obrázek.



Obrázek 1: Graf $f(x) = x^3e^{-x^2}$.

3: Neurčitý integrál

Spočtěte

$$\int \sin^2(e^x + 5)e^x \, \mathrm{d}x.$$

(10 bodů)

Začneme tím, že zkusíme použít Větu o substituci. Nabízí se udělat substituci za argument sinu, protože potom

$$\int \sin^2(e^x + 5)e^x \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} e^x + 5 = y \\ e^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \sin^2(y) \, \mathrm{d}y.$$

Nyní už se žádná další substituce nenabízí, ani parciální zlomky nepřipadají v úvahu. Použijeme proto jedinou dalíš možnost - per partes

$$\int \sin^2(y) \, \mathrm{d}y \overset{p.p}{=} -\cos(y)\sin(y) + \int \cos^2(y) \, \mathrm{d}y.$$

Zdánlivě jsme si moc nepomohli, ale existují dvě snadné cesty k výsledku. Zaprvé je možné použít goniometrickou jedničku, což vede na

$$\int \sin^2(y) \, \mathrm{d}y \overset{p.p}{=} -\cos(y)\sin(y) - \int \cos^2(y) \, \mathrm{d}y = -\cos(y)\sin(y) - \int 1 - \sin^2(y) \, \mathrm{d}y.$$

Tato rovnice vlastně říká

$$2\int \sin^2(y) \, \mathrm{d}y = -\cos(y)\sin(y) + \int 1 \, \mathrm{d}y \Rightarrow \int \sin^2(y) \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\cos(y)\sin(y) + \frac{y}{2} + c.$$

Alternativní postup je udělat ještě jedno per partes, což by vedlo k podobnému konci. Celkově tedy dostáváme

$$\int \sin^2(e^x+5)e^x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(e^x+5)\sin(e^x+5) + \frac{e^x+5}{2} + c.$$

4: Limita

Spočtěte limitu

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} \sqrt{t}.$$

(8 bodů)

Nejdřív se zaměřme na řadu jako takovou. Ta v příslušné limitě diverguje, protože nesplňuje Nutnou podmínku konvergence. Proto je tento limitní výraz typu “$0\cdot\infty$”.

Řešení spočívá v pochopení, jak přesně rostou částečné součty dané řady. Bohužel ale částečné součty nemůžeme přímo vyjádřit přímo. Musíme tedy použít odhad podobný integrálním kritériu pro konvergenci řad. Platí totiž

$$\sum_{t=1}^{T} \sqrt{t} \le \int_1^T \sqrt{t} \, \mathrm{d}t,$$

protože $\sqrt{t}$ je rostoucí fce. Odtud už snadno vidíme

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} \sqrt{t} \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_1^T \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Protože $\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sqrt{t} \ge 0$, dostáváme z Věty o dvou policajtech

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} \sqrt{t} = 0.$$

Alternativní postup je použít jako horního policajta fci $T\sqrt{T}/T^2$, která spočítá v odhadu každého členu posledním členem sumy.