Zápočtový test č. 2 (23. 5. 2022)

1: Limita

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{3-\sqrt{9-x}}$$

(8 bodů)

Ukažme dva postupy

- Úpravy:

  Použijeme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ve jmenovateli a dostaneme

  $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{3-\sqrt{9-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{3-\sqrt{9-x}} \frac{3+\sqrt{9-x}}{3+\sqrt{9-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{9-9+x}(3+\sqrt{9-x}) \overset{\text{VoAL}}{=} 6 \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right).$$

  Sinus je fce omezená a $x \to 0$, takže bychom čekali, že limita bude 0. K důkazu stačí použít Větu o dvou policajtech s odhadem $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) \leq 1$, kde

  $$\lim_{x\to 0} \pm x = 0,$$

  tedy i

  $$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) = 0.$$

- Taylor:

  Použijeme Taylorův rozvoj $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$, tedy pro $y = -\frac{x}{9}$ dostaneme

  $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{3-\sqrt{9-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{3-3\sqrt{1-\frac{x}{9}}} \overset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{3-3+\frac{x}{6}+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{1+o(1)}.$$

  Odtud je postup stejný jako v minulém bodě.

2: Řada

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\sin(n)}{n!}$$

(8 bodů)

Protože $\sin(n)$ má omezené částečné součty, chtěli bychom použít Dirichletovo kritérium. K tomu musíme ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

To ale snadno ukážeme pomocí $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{n}\right)},$$

kde $\frac{n}{2} \to \infty$ a $\ln\left(\frac{2}{n}\right) \to -\infty$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{n}\right)} = 0$$

a Dirichletovo kritérium říká, že řada konverguje.

3: Průběh funkce

Vyšetřete průběh funkce (tedy minimálně definiční obor, monotonii, konvexitu, asymptotické chování) pro

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$$

a načrtněte její graf.

(10 bodů)

Z tvaru fce vidíme, že $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Dále je fce sudá, protože

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{1}{(-x)^2-1}\right) = f(x).$$

Můžeme se tedy omezit na $\mathbb{R}^+$.

Diskuzi začněme zkoumáním asymptotického chování fce, tedy

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \arctan(0) = 0.$$

Dále nás budou zajímat limity k nespojitostem v definičním oboru, které rozdělíme na limity z každé strany

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1^-} \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \lim_{y\to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}.$$

Nyní spočteme první a druhou derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)' = -\frac{x^4-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}\frac{2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{x^4-2x^2+2},$$
$$f''(x) = -\left(\frac{2x}{x^4-2x^2+2}\right)' = -\frac{2(x^4-2x^2+2)-2x(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2} = \frac{6x^4-4x^2-4}{(x^4-2x^2+2)^2}.$$

Hledání extrémů vede na rovnici

$$0 = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2+1} \Rightarrow x = 0,$$

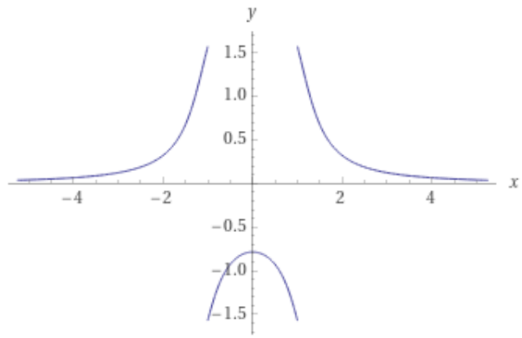
zatímco pro inflexní body dostáváme

$$0 = f''(x) = \frac{6x^4-4x^2-4}{(x^4-2x^2+2)^2} \Rightarrow 6x^4-4x^2-4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}.$$

Záporné kořeny neuvažujeme a máme $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}} \approx 1.1$.

Víme tedy, že f je klesající ($f'(x) < 0$ pro $x > 0$) a má extrém v $x = 0$. Dále má dva inflexní body $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$. Vyšetření konvexity musíme rozdělit - pro $x > \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ se znaménko derivace nemění a tak stačí dosadit jeden bod. Konkrétně $f''(5) = \frac{3646}{332929} > 0$, tedy fce je konvexní a musí být na $\left(1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}\right)$ konkávní. Na $(0,1)$ musíme opět být opatrní, protože nespojitost může změnit konvexitu a nemusí. Pro $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1184}{625}$, tedy je konkávní.

S těmito informacemi jde už snadno načrtnout zkoumanou fci.



Obrázek 1: Graf $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$.

4: Určitý integrál

Spočtěte

$$\int_{-\ln(6)}^{-\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1-e^x}.$$

(8 bodů)

Integrál jistě nevyřešíme bez toho, abychom se zbavili exponenciály ve jmenovateli. Pokud uděláme substituci za $e^x = y$, pak dostaneme $e^x \ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, neboli $\mathrm{d}x = y^{-1} \ \mathrm{d}y$. Proto

$$\int_{-\ln(6)}^{-\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1-e^x} = \left\{ \begin{array}{c} e^x = y \\ e^x \ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)},$$

na což jde s výhodou použít parciální zlomky.

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{1-y}, \quad \alpha = \left(\frac{1}{y(1-y)} y\right)_{y=0} = 1, \quad \beta = \left(\frac{1}{y(1-y)}(1-y)\right)_{y=1} = 1.$$

Odtud tedy

$$\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \ \mathrm{d}y = [\ln|y| - \ln|1-y|]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} = \left[\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} = \ln(5).$$

5: Objem rotačního tělesa

Uvažujte rotačně symetrickou vázu, jejíž vnitřní stěna je dána funkcí

$$f(x) = \cos(x) + 2.$$

Určete množství vody ve váze, pokud $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(6 bodů)

Použijeme vzorec pro objem rotačně symetrického tělesa

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi f^2(x) \ \mathrm{d}x = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2(x) + 4\cos(x) + 4 \ \mathrm{d}x =: \pi(I_1 + I_2 + I_3),$$

kde jednotlivé integrály spočítáme zvlášť.

Poslední integrál je primitivní

$$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4 \, \mathrm{d}x = 4[x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

Druhý integrál je snadný

$$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4\cos(x) \, \mathrm{d}x = 4[\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4[-1-(-1)] = 0.$$

Provýpočet prvního integrálu použijeme per partes a goniometrickou jedničku

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x \overset{\text{pp.}}{=} [\sin(x)\cos(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\sin^2(x) \, \mathrm{d}x = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1-\cos^2(x) \, \mathrm{d}x,$$

neboli

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Celkově tedy dostáváme $V = 9\pi^2$.