

Řešení cvičení 9: Taylorův rozvoj

Přímé rozvoje

Vyjádřete Taylorův polynom následujících funkcí v bodě x_0 pro $a \in \mathbb{R}$ do druhého řádu

- (a) e^{x^2} , $x_0 = 0$, (c) $e^x \sin(x)$, $x_0 = 0$, (e) $\sqrt{1+ax}$, $x_0 = 0$,
 (b) $\ln(1+x^2)$, $x_0 = 0$, (d) e^{ax} , $x_0 = 0$, (f) \sqrt{x} , $x_0 = 1$.

Postupujeme prostě tak, že funkci neustále derivujeme a vyhodnocujeme tuto derivaci v příslušném bodě.

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(x_0) &= 0, \\ f''(x) &= 2e^{x^2} & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Všimněme si, že protože je funkce sudá, musí všechny liché členy rozvoje být nulové a to nám i vyšlo. Tento rozvoj je tedy platný i do 3tího řádu. Dále si jde všimnout, že jsme dostali prostě rozvoj e^y pro $y = x^2$.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x^2) & f(x_0) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} & f'(x_0) &= 0, \\ f''(x) &= \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = x^2 + o(x^2).$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin(x) & f(x_0) &= 0, \\ f'(x) &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) & f'(x_0) &= 1, \\ f''(x) &= 2e^x \cos(x) & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = x + x^2 + o(x^2).$$

(d)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= ae^{ax} & f'(x_0) &= a, \\ f''(x) &= a^2 e^{ax} & f''(x_0) &= a^2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + o(x^2).$$

Opět nám vyšel vlastně rozvoj e^x , do kterého jsme akorát “dosadili” ax .

(e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+ax} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{a}{2\sqrt{1+ax}} & f'(x_0) &= \frac{a}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{a^2}{4}(1+ax)^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= -\frac{a^2}{4}, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + \frac{ax}{2} - \frac{a^2x^2}{8} + o(x^2).$$

(f)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(x_0) &= \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{3!}x^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= -\frac{1}{3!}, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 3!} + o(x^2).$$

Přibližná hodnota

Spočítejte přibližně a určete chybu odhadu

(a) $\sqrt[5]{250}$, (b) e^2 , (c) $\ln(1.2)$, (d) $\sin(\pi - 0.2)$.

(a) Na začátku výpočtu si situaci zlehčíme tak, že vytkneme největší číslo typu a^5 menší než 250. To dává $3^5 = 243$, tedy $\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243+7} = \sqrt[5]{243} \sqrt[5]{1+\frac{7}{243}} = 3 \sqrt[5]{1+\frac{7}{243}}$. Nyní můžeme použít Taylorův rozvoj pro $(1+x)^{\frac{1}{5}}$ kolem $x=0$, protože $\frac{7}{243} \ll 1$. Tento rozvoj je (buď spočteme rukou, nebo použijeme wolfram)

$$(1+x)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + o(x^2).$$

Pokud použijeme jen první řád, dostáváme hodnotu $\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}} \approx 1 + \frac{7}{1215} \approx 1.00576$. Chybu určíme pomocí následujícího řádu. My ale neznáme hodnotu c a proto chybu odhadneme a zvolíme c tak, aby byla co největší. Druhá derivace naší funkce je

$$\left((1+x)^{\frac{1}{5}} \right)'' = -\frac{4}{25(1+x)^{\frac{9}{5}}},$$

což je v abso­lutní hodnotě¹ největší pro $x=0$, tedy volíme i $c=0$. Tam je chyba

$$R_2 = \frac{4}{25} \frac{1}{2!} \left(0 - \frac{7}{243} \right)^2 \approx 0.00007.$$

Dostáváme tedy $\sqrt[5]{250} = 3(1.00576 \pm 0.00007) = 3.0173 \pm 0.0002$. Správná hodnota² je ≈ 3.01709 , tedy v rámci chyby.

¹Zbytek jsme definovali jako $R_n = f - T_n$. Znaménko nám tedy říká, jestli je odhad větší či menší, ale zde nás zajímá jeho velikost.

²Neboli to, co spočítal počítač obdobným postupem, ale do vyššího řádu.

- (b) Známe rozvoj exponenciály a tedy přímočaře do prvního řádu dostáváme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

což pro $x = 2$ dává do prvního řádu $e^2 = 3$. Chyba takového odhadu je ale závislá na e^x , protože exponenciála je sama svojí derivací. Jak je vidět, je třeba chybu odhadnout jinak a to pomocí součtu zbytku řady jako to bylo v prvním bonusovém DÚ. Poznamenejme ale, že $e^2 \approx 7.389$, tedy chyba našeho odhadu je dost velká. Členy řady totiž pro $x = 2$ klesají poměrně pomalu.

- (c) Použijeme řadu
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- . Do prvního řádu opět máme
- $\ln(1.2) = 0.2$
- . Chybu určíme z následujícího řádu, kde víme

$$(\ln(1+x))'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

tedy největší příspěvek dostaneme pro $c = 0$, což dává chybu

$$R_2 = \frac{1}{2!} (0.2)^2 \approx 0.02.$$

Přesná hodnota je $\ln(1.2) \approx 0.182$, tedy v rámci chyby máme výsledek dobře.

- (d) Zde lze s výhodou využít buď sčítací vzorec, nebo přímo geometrickou intuici, která říká
- $\sin(\pi - 0.2) = \sin(0.2)$
- . Nyní použijeme Taylora pro sinus kolem nuly a do prvního řádu máme
- $\sin(0.2) = 0.2$
- . Chybu určíme pomocí

$$(\sin(x))'' = -\sin(x),$$

což maximalizuje na $[0, 0.2]$ právě $c = 0.2$

$$R_2 = \sin(0.2) \frac{1}{2!} (0.2)^2 \approx 0.004.$$

Tady jsem podváděl, protože opět nám zbytek závisí na samotném $\sin(x)$, který se snažíme určit. Je ale vidět, že $R_2 < \sin(0.2)$ a tedy 0.2 se zdá jako rozumný odhad, protože chyba jde odhadnout ze samotného odhadu $\sin(0.2)$. Skutečná hodnota je $\sin(0.2) \approx 0.1987$.

Vnoření řad

Spočítejte pouze pomocí skládání/násobení nekonečných řad základních funkcí z užitečných vztahů rozvoje funkcí v bodě $x_0 = 0$ do třetího řádu

(a) $e^x \sin(x)$,

(b) $\sin(\sin(x))$.

Známe rozvoje příslušných funkcí a chceme celkový rozvoj. Řady do sebe tedy “dosadíme” a snažíme se postupně najít všechny členy řádu x^n a postupovat do kýženého n . Zde chceme $n = 3$ a tedy rovnou budeme vše vyššího řádu strkat do $o(x^3)$

(a)

$$e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = x + x^2 + x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^3).$$

(b)

$$\begin{aligned} \sin(\sin(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \underbrace{\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3}{3!}}_{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)} + \underbrace{\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^5}{5!}}_{o(x^4)} = \\ &= x + x^3 \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^4). \end{aligned}$$

Limity

Spočítejte následující limity pro $a \in \mathbb{R}^+$

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$, (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{1}{2x^2}} \right)$,
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$,
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin(x) - x(x+1)}{x^3}$, (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2e^x - e^{2x} - 1}$,

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^5)}{x^4} =$$

$$\frac{1}{4!} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{4!}.$$

Tohle se většinou vynechává.

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a)x} + e^{-\ln(a)x} - 2}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \ln(a)x + \frac{(\ln(a)x)^2}{2!} + o(x^2)\right) + \left(1 - \ln(a)x + \frac{(\ln(a)x)^2}{2!} + o(x^2)\right) - 2}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(a)x)^2 + o(x^2)}{x^2} = (\ln(a))^2.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin(x) - x(x+1)}{x^3} \stackrel{3(a)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^3) - x(x+1)}{x^3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{3}.$$

(d) Taylora v nekonečno dělat neumíme, ale stejně nám může pomoci trik - uděláme substituci $x = \frac{1}{y}$ a použijeme známé rozvoje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{1}{2x^2}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(y) - e^{-\frac{y^2}{2}}}{y^4} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{y^2}{2}\right)^2\right) + o(y^4)}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{y^4}{4!} - \frac{y^4}{8} + o(y^4)}{y^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}.$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2e^x - e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!}\right) - 1 + o(x^2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2)} = -1.$$

(f) Jde o limitu posloupnosti, která je nám již dobře známá. Zde jí vyřešíme na dvou řádcích.

Nejprve řekněme, že podle Heineho věty je možné toto vnímat jako limitu funkce a pokud ta existuje, je nutně rovná limitě posloupnosti.

Chtěli bychom použít Taylorův rozvoj, ale ten nejde dělat v nekonečnu. Použijeme tedy už zmíněný převod proměnných $n = \frac{1}{x}$. To nám umožní psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2n} - 2\sqrt{n^2 + n} + n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} (\sqrt{1 + 2x} - 2\sqrt{1 + x} + 1) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left[1 + \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} - 2 \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) + 1 + o(x^2) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2x^2}{8} + o(x^2) \right) = -\frac{1}{4}.$$

Motivace z fyziky

Kinetická energie je v teorii relativity daná jako

$$K = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} - m_0 c^2,$$

kde $m_0 = \text{const.}$ je hmotnost částice, v její rychlost a $c = \text{const.}$ rychlost světla. Pro pomalé částice, tedy $v \ll c$ by se měla tato veličina redukovat na její klasickou podobu $K = \frac{1}{2}mv^2$. Přesvědčte se, že to tak opravdu je a určete první relativistickou opravu k této limitě.

Nejprve musíme vzorec upravit, protože rozvoj děláme v malém ale bezrozměrném parametru $\frac{v}{c} \ll 1$, který označíme x . Proto

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2,$$

Pokud se zbavíme otravných konstant a soustředíme se jen na důležitou část, pak rozvíjíme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

To zpětně dosadíme do vzorce pro kinetickou energii

$$K = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + o \left(\left(\frac{v}{c} \right)^5 \right) \right] - m_0 c^2 = \\ \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{Klasická kinetická energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}}_{\text{První relativistická oprava}} + o \left(\left(\frac{v}{c} \right)^5 \right).$$

Je tedy vidět, že pro pomalu letící částice bude hlavním příspěvkem část, kterou pozorovali lidé už předtím. To samozřejmě dává dobrý smysl, protože pokud má teorie nějakou část poznání rozšiřovat, musí v limitách kdy dobře fungovala předchozí teorie přecházet právě na ni.