Řešení domácího úkolu 8

1. Načrtněte graf funkcí

   (a)
$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$
(1 bod)

   (b)
$$g(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
(1 bod)

   (c)
$$h(x) = x \ln(|x|)$$
(1 bod)

   kde jsou funkce definovány a najděte polohy maxim/minim, pokud existují.

   Může se hodit $(x-2)e^x - 2 = 0 \Rightarrow x \approx 2.22$.

   Ve všech příkladech postupujeme stejně.

   i Určíme definiční obor.

   ii Určíme asymptotické chování pomocí $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

   iii Kde to jde, tam najdeme derivaci a extrémy hledáme pomocí $f'(x) = 0$.

   iv Mezi těmito extrémy a "dírami" v definičním oboru dosadíme libovolný bod. Podle znaménka derivace určíme monotonii fce.

   v Spočteme druhou derivaci a pomocí $f''(x) = 0$ hledáme inflexní body.

   vi Vyčíslením druhé derivace v extrémech fce určíme, o jaké extrémy jde.

   (a) i $D_f = \mathbb{R}$.

   ii Obě asymptotické limity jsou snadné

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0.$$

   iii Extrémy hledáme pomocí první derivace

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+e^{-x})^{-1} = -(1+e^{-x})^{-2}\frac{\mathrm{d}e^{-x}}{\mathrm{d}x} = (1+e^{-x})^{-2}e^{-x}.$$

   Hledáním kořenů $f'(x) = 0$ zjistíme, že neexistují, protože fce je kladná.

   iv $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$, tedy fce je rostoucí.

v

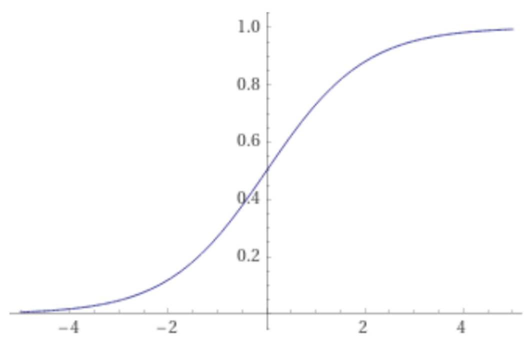
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+e^{-x})^{-2}e^{-x} = 2(1+e^{-x})^{-3}e^{-2x} - (1+e^{-x})^{-2}e^{-x} = \\ \left[2(1+e^{-x})^{-1}e^{-x} - 1\right](1+e^{-x})^{-2}e^{-x}.$$

Hledáním kořenů zjistíme, že

$$\begin{aligned} \left[2(1+e^{-x})^{-1}e^{-x} - 1\right](1+e^{-x})^{-2}e^{-x} &= 0, \\ 2(1+e^{-x})^{-1}e^{-x} &= 1, \\ 2e^{-x} &= 1+e^{-x}, \\ e^{-x} &= 1, \\ x &= 0, \end{aligned}$$

tedy máme jeden inflexní bod v $x = 0$. Dosazením do druhé derivace zjistíme, že pro $x > 0$ je konkávní a tedy pro $x < 0$ je konvexní.

Pomocí těchto informací už můžeme načrtnout graf funkce, který je níž. Stojí za zmíňku, že tohle je tkz. logistická regrese, která se používá k modelování pravděpodobnosti nějakého jevu, růstu populace apod.



Obrázek 1: Příklad 1(a).

(b) i Opět $D_g = \mathbb{R}$.

ii Obě asymptotické limity jsou zase snadné

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{x^2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+e^{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x}} = 0, \\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \infty. \end{aligned}$$

iii Extrémy hledáme pomocí první derivace

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{1+e^{x}} = -(1+e^{x})^{-2}x^2e^{x} + 2x(1+e^{x})^{-1} = \\ x(1+e^{-x})^{-1}\left[2 - x(1+e^{x})^{-1}e^{x}\right].$$

Hledání kořenů $g'(x) = 0$ vede na

$$\begin{aligned} x(1+e^{-x})^{-1}\left[2 - x(1+e^{x})^{-1}e^{x}\right] &= 0, \\ 2x &= x^2(1+e^{x})^{-1}e^{x}, \\ 2x + 2xe^{x} &= x^2e^{x}, \\ x\left[2 + 2e^{x} - xe^{x}\right] &= 0, \\ -x\left[e^{x}(x-2) - 2\right] &= 0, \end{aligned}$$

odkud plyne $x = 0$ a $x \approx 2.22$. Označmě druhý extrém x_e.

iv Dosazením bodů -1, 1 a 5 do $g'(x)$ zjistíme

$$\begin{aligned} g'(-1) &= -(1+e)^{-1}\left[2+(1+e^{-1})^{-1}e^{-1}\right] < 0 \Rightarrow g \text{ klesá na } (-\inf, 0),\\ g'(1) &= (1+e^{-1})^{-1}\left[2-(1+e)^{-1}e\right] > 0 \Rightarrow g \text{ roste na } (0, x_e),\\ g'(5) &= 5(1+e^{-5})^{-1}\left[2-5(1+e^{5})^{-1}e^{5}\right] < 0 \Rightarrow g \text{ klesá na } (x_e, \infty), \end{aligned}$$

kde jsme v bodě 1 a 5 použili fakty, že $f(x) = (1+e^x)^{-1}e^x \in (0,1)$, $f(0) = \frac{1}{2}$ a f je rostoucí[1] viz minulý bod.

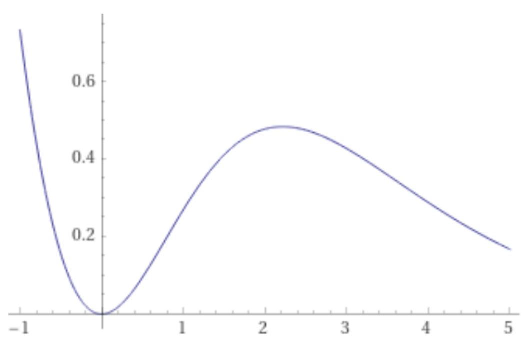
v

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x(1+e^{-x})^{-1}\left[2-x(1+e^{x})^{-1}e^{x}\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{2x}{1+e^{-x}} - \frac{x^2e^x}{(1+e^{-x})(1+e^x)}\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{2x}{1+e^{-x}} - \frac{x^2e^x}{2+e^{-x}+e^x}\right]\\ &= \left[\frac{2}{1+e^{-x}} + \frac{2xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{2xe^x}{2+e^{-x}+e^x} - \frac{x^2e^x}{2+e^{-x}+e^x} - \frac{x^2e^x(e^x-e^{-x})}{(2+e^{-x}+e^x)^2}\right]\\ &= \left[\frac{2}{1+e^{-x}} + \frac{2xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{2xe^x}{2+e^{-x}+e^x} - \frac{x^2e^x}{2+e^{-x}+e^x} - \frac{x^2(e^{2x}-1)}{(2+e^{-x}+e^x)^2}\right] \end{aligned}$$

Hledat explicitně inflexní body nebudeme ani zkoušet, protože vlastně máme dost informací i bez nich. Pokud bychom ale použili např. Wolfram, dostaneme numerická řešení

$$g''(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 0.79, x_2 \approx 3.62.$$

Dosazením nějakých bodů v intervalech ohraničených těmito body jde ukázat, že fce je konkávní na (x_1, x_2) a konvexní jinde. Níž je přesný graf funkce.



Obrázek 2: Příklad 1(b).

[1] Tedy $2-5(1+e^5)^{-1}e^5 \leq 2-5\frac{1}{2} = -0.5 < 0$.

(c) i Argument logaritmu musí být kladný, což u nás nebude platit pro $x = 0$, tedy $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ii Obě asymptotické limity jsou zase snadné

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(|x|) = \lim_{x\to\infty} x\ln(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\ln(|x|) = \lim_{x\to-\infty} x\ln(-x) = -\infty.$$

V tomhle případě nás bude ještě zajímat limita k nule, kde je nespojitost v definičním oboru. Musíme ale případ rozdělit do dvou podpříkladů podle toho, z které strany se k nule blížíme

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(|x|) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0,$$
$$\lim_{x\to0^-} x\ln(|x|) = \lim_{x\to0^-} x\ln(-x) = \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} = \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{-x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0,$$

tedy i celá limita je $\lim_{x\to0} x\ln(|x|) = 0$.

iii Extrémy hledáme pomocí první derivace, kterou ale nepůjde udělat pro $x = 0$. Podobně jako v asymptotách rozdělíme diskuzi na dva případy pro kladná a záporná x

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\ln(|x|) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\ln(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = 1 + \ln(x) & x > 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\ln(-x) = \ln(-x) - x\frac{1}{-x} = 1 + \ln(-x) & x < 0, \end{cases}$$

což jde opět napsat jako $f'(x) = 1 + \ln(|x|)$.
Hledání kořenů $h'(x) = 0$ vede na

$$\begin{aligned} 1 + \ln(|x|) &= 0, \\ \ln(|x|) &= -1, \\ |x| &= e^{-1}, \\ x &= \pm e^{-1}. \end{aligned}$$

iv Oproti extrémům máme zde ještě bod mimo definiční obor, kde mohlo dojít ke změnu znaménka derivace a tedy monotonie. Dosadíme tedy třeba ±1 a $\pm\frac{1}{5}$, protože $\frac{1}{5} < e^{-1}$

$$\begin{aligned} h'(-1) &= 1 + \ln(|1|) = 1 > 0 \Rightarrow h \text{ roste na } (-\inf, -e^{-1}), \\ h'\left(-\frac{1}{5}\right) &= 1 + \ln(|1|) \approx -0.61 < 0 \Rightarrow h \text{ klesá na } (-e^{-1}, 0), \\ h'\left(\frac{1}{5}\right) &= h'\left(-\frac{1}{5}\right) < 0 \Rightarrow h \text{ klesá na } (0, e^{-1}), \\ h'(1) &= h'(-1) > 0 \Rightarrow h \text{ roste na } (e^{-1}, \infty). \end{aligned}$$

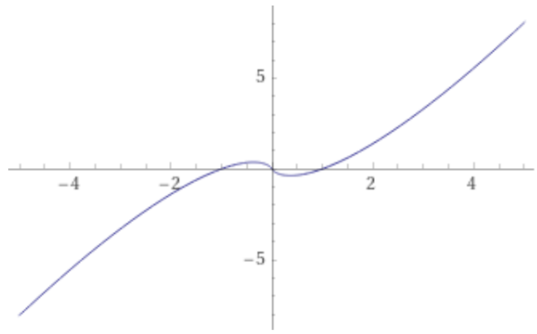
v

$$h''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 + \ln(|x|) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 + \ln(x) = \frac{1}{x} & x > 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 + \ln(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} & x < 0. \end{cases}.$$

Odtud si můžeme uvědomit, že například extrém v e^{-1} je minimum, protože $h''(e^{-1}) = e > 0$. To souhlasí s tím, že fce je nalevo klesající a napravo rostoucí.
Protože derivace vychází na obou stranách symetricky, můžeme si povšimnout faktu, který se s výhodou dal využít už od začátku. Daná fce je lichá, což je vidět z

$$h(x) = x\ln(|x|) = -(-x)\ln(|-x|) = -h(-x).$$

Graf bude tedy bodově symetrický vůči počátku.
Nyní už máme všechny informace, abychom graf načrtli. Přesný je na obrázku níž.



Obrázek 3: Příklad 1(c).

2. Uvažujte elipsu

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

a v ní vepsaný obdélník, viz (ilustrativní) obrázek. Jaké jsou rozměry stran obdélníku, aby měl maximální obsah?

(2 body)

Nejprve vyjádříme obsah daného obdélníka. Pokud má bod na elipse souřadnice $[x, y]$, pak můžeme použít definici elipsy

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

tedy bod je $\left[x, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right]$. Obdélník má tak plochu rovnou[2]

$$S = (2x) \cdot \left(2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right) = 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

Odtud rovnou vidíme, že $x \in [-2, 2]$, což odpovídá tomu, že pro $x = \pm 2$ prochází elipsa osou x.

Nyní už je řešení snadné, budeme hledat extrém této fce pomocí

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2x\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0,$$

tedy

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - x^2} &= \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}, \\ 4 - x^2 &= x^2, \\ 2 &= x^2, \\ x &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Všimneme si, že nám vyšlo i záporné řešení. To jen říká, že na hledaný obdélník se můžeme dívat “z druhé strany papíru”. Z toho důvodu se budeme dál dívat jen na kladné řešení.

Dosazením do druhé souřadnice dostaneme $y = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy maximální objem je $S = 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 4$.

[2] Každá ze stran je rovna dvojnásobku souřadnice bodu na elipse.