Cvičení 8: Průběh funkce

Extrémy

Najděte extrémy funkcí pouze pomocí kalkulačky

(a) $2\sin(2x) + 2x$ na $[0, 4]$,

(b) x^2e^{-x} na $\mathbb{R}$.

Následující postup se může zdát “příliš složitý”. Samozřejmě by šlo si příslušné funkce vykreslit v nějakém softwaru a dostat odpověď velice rychle, ale je dobré postupu rozumět a umět se v něm orientovat. Časem Vás možná budou zajímat extrémy mnohadimenzionálních funkcí, které nepůjdou snadno znázornit a bude třeba se uchýlit k tomuto postupu.

(a) $y = 2\sin(2x) + 2x$ na $[0, 4]$
Nejprve spočteme derivaci, kterou položíme nule. Víme, že kde derivace existuje, tam může být lokální maximum pouze pokud je derivace nulová

$$y' = 4\cos(2x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}.$$

Řešení této rovnice je $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. Na našem intervalu je to $x = \frac{\pi}{3}$ a $x = \frac{4\pi}{3}$. Těmto extrémům odpovídají funkční hodnoty $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \approx 3.83$ a $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \approx 2.46$.

Zbývá nám tedy vyřešit krajní hodnoty a hodnoty, kde derivace neexistuje. Rovnou vidíme, že na zkoumaném intervalu existuje derivace všude. Budeme se tedy zajímat pouze o krajní body, kde

$$y(0) = 0,$$
$$y(4) = 2\sin(8) + 8 \approx 9.98.$$

Lokální extrémy uvnitř intervalu tedy nejsou maxima/minima na daném intervalu a jsou jimi krajní body.

(b) x^2e^{-x} na $\mathbb{R}$
Opět jako první krok spočteme derivaci a budeme studovat její nulovost

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (2 - x)xe^{-x} = 0.$$

Odtud jsou rovnou vidět kořeny $x = 0$ a $x = 2$. Stačí v nich spočítat příslušné hodnoty

$$y(0) = 0,$$
$$y(2) \approx 0.54.$$

Derivace opět existuje všude, takže stačí zkoumat limity v “krajních bodech”, tedy v nekonečnech. V tomto případě jsou primitivní

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty.$$

Minimum je tedy v $x = 0$ a maximum neexistuje.

Průběh

Načtrněte grafy následujících funkcí

(a) $\frac{\sin(x)}{x}$,

(b) e^{-x^2},

(c) $e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$,

(d) $\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$,

(e) $\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$,

(f) $1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

Postup je vždy stejný

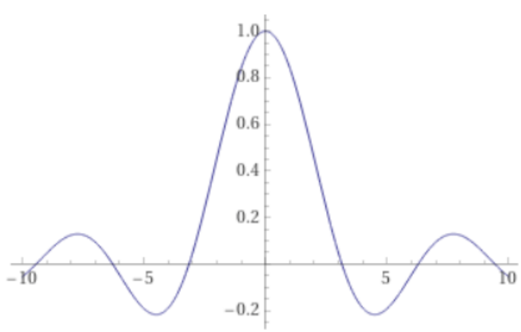
- Spočteme derivaci a položíme ji rovnou nule, čímž najdeme extrémy, kde derivace existuje.
- Pomocí druhé derivace určíme, jde-li o maximum, minimum, či "konstantní plato".
- Dopočteme limity tam, kde derivace neexistuje a v nekonečnech.
- Vše poskládáme a načrtneme graf.

(a) $y = \frac{\sin(x)}{x}$

- $y' = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \tan(x)$. To neumíme vyjádřit přesně, nicméně je vidět, že řešení bude nekonečně mnoho. Taky je vidět, že velikost derivace klesá se zvětšující se absolutní hodnotou x, tedy se "vlnění funkce zmenšuje".
- $y'' = -\frac{(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)}{x^3}$, což nám moc nepomůže. Je ale vidět, že v nule se blíží k něčemu zápornému $\Rightarrow$ v nule je ostré maximum.
- Funkce není dobře definovaná v $x = 0$. Tam už ale limitu dobře známe

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Funkce je vlastně sin tlumený $\frac{1}{x}$, takže tvar nepřekvapí

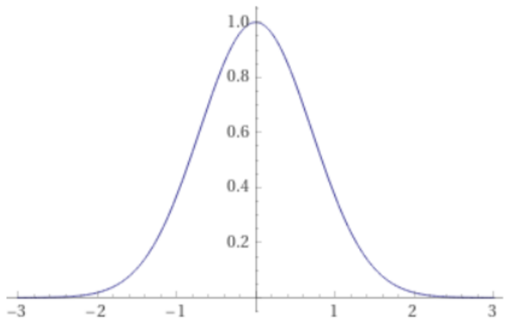


Obrázek 1: Příklad (a).

(b) $y = e^{-x^2}$

- $y' = -2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Máme tedy jediný extrém v nule.
- $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Vyčíleno v nule $y''(0) = -2 > 0$, tedy jde o maximum.
- $$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Funkce tedy vypadá jako takový hrb symetricky rozložený kolem $x = 0$. Je to tkz. Gaussova funkce a je extrémně důležitá v mnoha oblastech. V jistém smyslu je to ta "nejzákladnější" funkce.



Obrázek 2: Příklad (b).

(c) $y = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

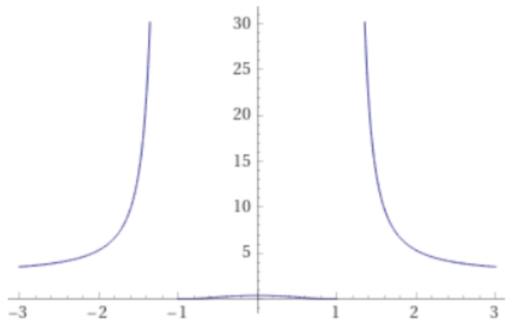
- $y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$. Derivace je tedy nulová v nule a neexistuje v $x = \pm 1$.
- $y'' = \frac{4(3x^4+2x^2-1)}{(x^2-1)^4}e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, což je v $x = 0$ záporné, tedy v nule je lokální maximum.
- Limity v nekonečnech jsou snadné. Pro limity k ± 1 použijeme rozklad

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = e,$$
$$\lim_{x\to\pm 1} e^{1+\frac{2}{x^2-1}}.$$

Je vidět, že druhá limita neexistuje. Pokud se k např. 1 blížíme z kladných hodnot, pak jde exponent k nekonečnu. Pokud ale jdeme směrem od nuly, je exponent záporný a jde k mínus nekonečnu

$$\lim_{x\to\pm 1^+} e^{1+\frac{2}{x^2-1}} = \infty,$$
$$\lim_{x\to\pm 1^-} e^{1+\frac{2}{x^2-1}} = 0.$$

Odtud už jde snadno poskládat, jak má funkce vypadat.



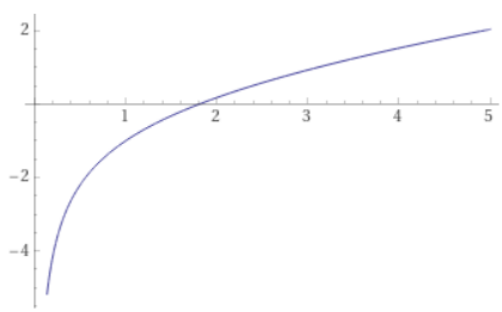
Obrázek 3: Příklad (c).

(d) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

- $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0$. Funkce je dobře definovaná jen pro $x > 0$, kde jsou oba členy kladné a tedy je funkce rostoucí.
- $y'' = -\frac{4x^{\frac{7}{6}}+27}{18x^{\frac{5}{2}}}$. To nám ale mnoho neřekne krom toho, že je vždy záporná. Funkce je tedy konkávní.
- Příslušné limity jsou opět snadné

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Tedy dostáváme



Obrázek 4: Příklad (d).

(e) $y = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

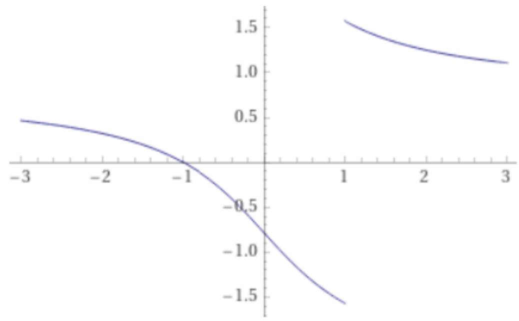
- $y' = -\frac{1}{x^2+1} < 0$, tedy funkce je klesající všude.
- $y'' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, tedy funkce je konvexní pro $x > 0$ a konkávní pro $x < 0$.
- Funkce není dobře definovaná pro $x = 1$, takže spočteme limitu i tam. K tomu si jí opět rozepíšeme

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to 1} \arctan\left(1 + \frac{2}{x-1}\right).$$

Opět vidíme, že druhá limita neexistuje, protože

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1^-} \arctan\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Odtud už snadno načrtneme



Obrázek 5: Příklad (e).

(f) $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$

- $y' = -1 + \frac{\left(\frac{x^3}{3+x}\right)^{\frac{3}{2}}(2x+9)}{2x^4}$. Funkce je opět dobře definovaná pouze pro $x > 0$, kde je derivace vždy záporná. To je vidět z toho, že $y'(0) = -1$ a $y'(x \to \infty) = 0$. Zároveň pokud by existovalo x takové, že $y'(x) = 0$, pak

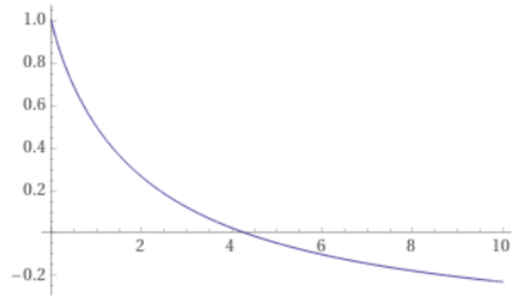
$$\left(\frac{2x^4}{2x+9}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{3+x}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{4x^8}{4x^2+36x+81} = \frac{x^9}{27+27x+27x^2+x^3} \Leftrightarrow$$
$$4(27+27x+27x^2+x^3) = x(4x^2+36x+81) \Leftrightarrow 72x^2+27x+108 = 0,$$

což nemá reálná řešení.

- $y'' = \frac{27x}{4\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}(x+3)^3} > 0$, tedy funkce je konvexní.
- Limita v nule je triviální. V nekonečnu dá trochu víc práce

$$\lim_{x\to 0} = 1,$$
$$\lim_{x\to\infty} = \lim_{x\to\infty} 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\frac{x^3}{3+x} - x^2}{x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{-3x^2}{(3+x)\left(x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

S těmito informacemi můžeme načrtnout graf.



Obrázek 6: Příklad (f).

Optimalizace

Zaměstnanci

Představte si, že jste ředitel(ka) firmy, která zaměstnává N lidí. Každému zaměstnanci platíte 30 000 Kč měsíčně.

(a) Každý zaměstnanec vyprodukuje firmě zisk 120 000 Kč měsíčně. Jaký je optimální počet zaměstnanců, který ve firmě mít?

(b) Realističtější model je takový, ve kterém s větším počtem zaměstnanců efektivita celé skupiny neroste lineárně. To může být způsobeno tím, že je třeba mězi sebou komunikovat a čekat na výsledky jiných zaměstnanců. Použijeme tedy přiblížení, že výdělek firmy roste s odmocninou počtu zaměstnanců, tedy 120 $000\sqrt{N}$. Jaký je optimální počet zaměstnanců?

(c) Máte možnost najmou zkušeného managera, který zvýší efektivitu zbytku zaměstnanců. Manager tvrdí, že je schopen docílit výdělku 120 000 $N^{\frac{3}{5}}$, ale bude Vás stát dalších 200 000 Kč měsíčně. Vyplatí se takového managera najmout, pokud můžete rovnou najmout podle potřeby i další zaměstnance?

(a) Zde je situace snadná. Chceme maximalizovat profit p

$$p = 120\ 000N - 30\ 000N,$$

což uděláme tak, že spočteme jeho derivaci $p' = 120\ 000 - 30\ 000 = 90\ 000 > 0$, tedy profit roste s N. To bylo jasné, protože každý zaměstnanec firmě představuje čistý zisk 90 000 Kč. Je tedy dobré mít těchto zaměstnanců co nejvíc.

(b) Zde je situace zajímavější. Profit spočteme podle

$$p = 120\ 000\sqrt{N} - 30\ 000N,$$

tedy $p' = \frac{120\ 000}{2\sqrt{N}} - 30\ 000$. Extrém bude tam, kde $0 = p' \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{N}} = 1$, neboli $N = 4$. To, že jde o maximum můžeme zjistit pomocí druhé derivace. Profit v tomto maximu tedy je $p = 120\ 000$.

(c) Manager zjevně zvýší produktivitu zbytku, ale je poměrně drahý pro naši reltivně malou firmu. Spočtěme optimální počet zaměstnanců s managerem

$$p = 120\ 000N^{\frac{3}{5}} - 30\ 000N - 200\ 000,$$

neboli $p' = \frac{3}{5}120\ 000N^{-\frac{2}{5}} - 30\ 000$. Najdeme opět maximum pomocí $p' = 0$, což vede na $N = \frac{288}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 9$. Pokud tedy rozšíříme firmu na 9 zaměstnanců + managera, bude profit maximální (opět by se dalo ověřit pomocí druhé derivace). Pokud nyní vyjádříme jeho hornotu, dostaneme $p \approx -21536$ Kč měsíčně. Neboli budeme peníze prodělávat. Efekt, který manager nabízí se stává podstatným teprve pokud $N \gg 1$, tedy pro velké firmy, kde zároveň platí lépe přiblížení z (b).

Politika

Jste politikem, který má řídit zemi v průběhu virové pandemie. Virus se rychle šíří populací, což Vaši přední poradci modelují pomocí funkce

$$i = \frac{I}{N} = \frac{1}{1 + e^{-\beta(t-5)}},$$

kde I je počet infikovaných lidi, N celkový počet lidí v zemi, t je čas od propuknutí epidemie v zemi[1] měřený v měsících a β je parametr. Pomocí zavedení různých opatření můžete nastavit $\beta \geq 0$.

(a) Za každého nakaženého budete mít výdaje za péči v nemocnicích ve výši Z. Přísnější opatření však omezí lidem možnost pracovat a tak stát získá na daních pouze $\frac{D}{1+\beta^2}$, kde D je obnos, který by normálně stát vydělal za půl roku. Jak optimálně nastavit β, aby stát vydělal za půl roku po propuknutí epidemie co nejvíc? Stačí vyjádřit příslušnou rovnici, ze které dostanete optimální hodnoty. Na dosazení a dopočítání máte lidi.

(b) Za půl roku budou též volby, které chcete vyhrát. Vaši poradci tvrdí, že vysoký počet nakažených se negativně projeví na Vašich preferencích, což kvantifikují pomocí I. Zároveň ale příliš tvrdá opatření též nedoporučují, protože ta se v jejich modelu projeví pomocí β. Jak optimálně nastavit přísnost opatření, abyste maximalizovali svoje šance na výhru ve volbách? V těchto důležitých věcech svým lidem nevěříte a výsledky si chcete ověřit sami.

Funkce, kterou uvažujeme pro modelování budoucího počtu nakažených je tkz. logistická funkce a je skutečně dobrým přiblížením v situaci, kdy neuvažujeme, že by se lidi mohli vyléčit.

(a) Zajímá nás situace za půl roku[2], tedy $t = 6$. V takové situaci chceme maximalizovat profit

$$p = \frac{D}{1+\beta^2} - ZI(t=6) = \frac{D}{1+\beta^2} - \frac{ZN}{1+e^{-\beta}}.$$

Odtud spočteme derivaci podle β, což je parametr ve kterém chceme optimalizaci dělat.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{2\beta D}{(1+\beta^2)^2} - \frac{ZNe^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2} = 0.$$

(b) Chceme minimalizovat odpor o k nám, tedy

$$o = I^2 + \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{1}{1+e^{-\beta}} + \beta.$$

Pokud nyní provedeme derivaci

$$\frac{\mathrm{d}o}{\mathrm{d}\beta} = \frac{e^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2} + 1 > 0.$$

Odpor tedy rostě s tvrdostí opatření. Proto je vidět, že se vyplatí nastavit opatření co nejmenší, tedy $\beta = 0$. Všimněme si, že pro $ZN > 0$ je pro $\beta = 0$ derivace profitu záporná, tedy s vyššími opatřeními klesá i profit. Je tedy možné, že $\beta = 0$ taky maximalizuje profit a pokud bychom si obrázek nechali vykreslit, tak tomu opravdu je

Oba optimalizační problémy neumíme vyřešit přímo. Pokud bychom ale znali všechny použité konstanty, mohli bychom použít jednu z mnoha metod hledání kořenů nelieárních rovnic, kterou nabízí řada různých softwarů.

[1] Technicky tohle není pravda. V tomhle modelu začala epidemie pred nekonečně dlouhou dobou, jak je vidět z limity. To ale budeme ignorovat a budeme věřit, že tohle je vážně dobrá formulka pro modelování počtu nakažených za t měsíců.

[2] Určitě by bylo zajímavé studovat něco jako celkový počet nakažených během onoho půl roku, ale zatím neumíme integrovat…

Plechovka

Vaším úkolem je navrhnout plechovku, kterou má použít nová značka přeslazeného bublinkového nápoje. Plechovka musí mít válcovitý tvar a objem $0.3l = 3\times10^{-4}m^3$. Stěny plechovky jsou z tenkého hliníku a stojí $1\ \frac{\mathrm{Kč}}{\mathrm{cm}^2}$. Podstavy se vyrábí z tlustšího plechu a stojí $3\ \frac{\mathrm{Kč}}{\mathrm{cm}^2}$. Navrhněte plechovku, která bude nejlevnější na výrobu s daným objemem.

Známe vzorec pro objem válce $V = \pi r^2 z$, kde r je poloměr základny a z výška válce. Plocha jedné podstavy je πr^2 a plocha válce je $2\pi rz$. tedy celková cena je

$$c = 1 * 2\pi rz + 3 * \pi r^2.$$

Můžeme měnit oba rozměry a tak není jasné, podle čeho derivovat a v čem provádět minimalizaci.

Nevyužili jsme však ještě požadavek, že celkový objem má být fixní. Použitím zvorce výš můžeme vyjádřit např. $z = \frac{V}{\pi r^2}$, což jde dosadit do rovnice pro cenu

$$c = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 3\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 3\pi r^2.$$

Nyní provedem derivaci podle r a hledáme extrém, takže jí položíme rovnu nule

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = -\frac{2V}{r^2} + 6\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}.$$

Lze se snadno přesvědčit, že druhá derivace je kladná a jde tedy o minimum ceny.

Odtud jde snadno určit i optimální výšku plechovky dosazením do vztahu pro objem. Je jasné, že jsme si mohli vybrat i z a provádět optimalizaci v něm. Zkuste si, že výsledek bude stejný.