

## Řešení cvičení 7: Derivace

### Snadné derivace

Spočtěte následující derivace

$$(a) \frac{d \tan(x)}{dx}, \quad (c) \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad (d) \frac{d \log_x(2)}{dx},$$

$$(b) \frac{d \sin(x^2)}{dx}, \quad (e) \frac{d|x|}{dx}.$$

$$(a) \frac{d \tan(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$(b) \frac{d \sin(x^2)}{dx} = \frac{d \sin(x^2)}{dx^2} \frac{dx^2}{dx} = \cos(x^2) 2x,$$

$$(c) \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{d}{dx} \sqrt{1 + \frac{2}{x-1}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^{-\frac{1}{2}} [-2(x-1)^{-2}],$$

$$(d) \frac{d \log_x(2)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \ln(2) \frac{d}{dx} \ln^{-1}(x) = \ln(2) (-1) \ln^{-2}(x) \frac{d}{dx} \ln(x) = -\ln(2) \ln^{-2}(x) \frac{1}{x},$$

$$(e) \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0, \\ \text{neexistuje} & x = 0. \end{cases}$$

### Obtížnější derivace

#### Vzorce

Spočtěte následující derivace

$$(a) \frac{d5^x}{dx}, \quad (c) \frac{d}{dx} \frac{(\ln(x))^x}{x^{\ln(x)}}, \quad (e) \frac{d}{dx} x^{5^{x^5}}.$$

$$(b) \frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dx}, \quad (d) \frac{d}{dx} \frac{\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x}}{5!(5^5 + x^5)^5},$$

No fu, samotnému se mi do toho nechce. Tohle je btw práce pro počítač. Kdybyste někdy vážně chtěli něco derivovat, nedělejte to rukou, uděláte tam chybu (čímž se rovnou omlouvám za svoje...)

$$(a) \frac{d5^x}{dx} = \frac{de^{x \ln(5)}}{dx} = e^{x \ln(5)} \frac{dx \ln(5)}{dx} = e^{x \ln(5)} \ln(5) = \ln(5) 5^x.$$

$$(b) \frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dx} \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \text{neexistuje} & x = 0. \end{cases}$$

V nule má funkce skok a tak vůbec není jasné, jakou by tam měla mít derivaci. Tady nemáme problém jako v 1(e), že derivace z obou stran se nerovnájí. V nějakém smyslu by se dalo říct, že derivace tam je “nekonečná”, ale tak jednoduché to není. Až Dirac dokázal v 20tém století zformalizovat tkz. distribuce, které se snaží dát odpověď na to, jaká je tahle derivace. Nicméně to je pro nás hodně daleko...

(c)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{(\ln(x))^x}{x^{\ln(x)}} &= \frac{1}{x^{2 \ln(x)}} \left( \frac{d(\ln(x))^x}{dx} x^{\ln(x)} - (\ln(x))^x \frac{dx^{\ln(x)}}{dx} \right) = \frac{1}{x^{2 \ln(x)}} \left( x^{\ln(x)} \frac{de^{x \ln(x)}}{dx} - (\ln(x))^x \frac{d e^{\ln^2(x)}}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{x^{2 \ln(x)}} \left( x^{\ln(x)} e^{x \ln(x)} \frac{dx \ln(x)}{dx} - (\ln(x))^x e^{\ln^2(x)} \frac{d \ln^2(x)}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{x^{2 \ln(x)}} \left( x^{\ln(x)} e^{x \ln(x)} \left( \ln(x) + \frac{x}{x} \right) - (\ln(x))^x e^{\ln^2(x)} 2 \ln(x) \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{x^{2 \ln(x)}} \left( x^{\ln(x)} e^{x \ln(x)} (\ln(x) + 1) - (\ln(x))^x e^{\ln^2(x)} 2 \ln(x) \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x}}{5!(5^5 + x^5)^5} &= \frac{1}{(5!(5^5 + x^5)^5)^2} \left[ \frac{d\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x}}{dx} 5!(5^5 + x^5)^5 - \sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x} \frac{d5!(5^5 + x^5)^5}{dx} \right] = \\ &= \frac{1}{5!(5^5 + x^5)^5} \frac{d\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x}}{dx} - \frac{5!\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x} d(5^5 + x^5)^5}{(5!(5^5 + x^5)^5)^2} = \\ &= \frac{(5x^5 + 5 + 5^x)^{-\frac{4}{5}} d(5x^5 + 5 + 5^x)}{5!(5^5 + x^5)^5} - \frac{5!\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x} 5(5^5 + x^5)^4 d(5^5 + x^5)}{(5!(5^5 + x^5)^5)^2} = \\ &= \frac{(5x^5 + 5 + 5^x)^{-\frac{4}{5}} (5^2 x^4 + \ln(5)5^x)}{5!(5^5 + x^5)^5} - \frac{5!\sqrt[5]{5x^5 + 5 + 5^x} 5(5^5 + x^5)^4 5x^4}{(5!(5^5 + x^5)^5)^2}. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{5^{x^5}} &= \frac{d}{dx} x^{e^{x^5 \ln(5)}} = \frac{d}{dx} e^{e^{x^5 \ln(5)} \ln(x)} = e^{e^{x^5 \ln(5)} \ln(x)} \frac{d e^{x^5 \ln(5)} \ln(x)}{dx} = \\ &= x^{5^{x^5}} \left( \ln(x) \frac{d e^{x^5 \ln(5)}}{dx} + e^{x^5 \ln(5)} \frac{d \ln(x)}{dx} \right) = x^{5^{x^5}} \left( \ln(x) e^{x^5 \ln(5)} \frac{d x^5 \ln(5)}{dx} + e^{x^5 \ln(5)} \frac{1}{x} \right) = \\ &= x^{5^{x^5}} 5^{x^5} \left( \ln(x) \ln(5) 5x^4 + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Poučení zní - derivace i relativně neškodně vypadajícího výrazu může vybuchnout. Hledat zjednodušení může pak být nadd lidský úkol - přenechejme ho stroji jak to je jen možné!

### Inverzní funkce

Pomocí  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \frac{df^{-1}(y)}{dy} \frac{df(x)}{dx} = 1$  spočítejte derivace fcí inverzních k

(a)  $e^x$ , (b)  $\sin(x)$ , (c)  $\tan(x)$ , (d)  $x^2$ .

(a)  $1 = \frac{d \ln(y)}{dy} \frac{de^x}{dx} = \frac{d \ln(y)}{dy} e^x \stackrel{e^x=y}{\Rightarrow} \frac{d \ln(y)}{dy} = \frac{1}{y}$ ,

(b)  $1 = \frac{d \arcsin(y)}{dy} \frac{d \sin(x)}{dx} = \frac{d \arcsin(y)}{dy} \cos(x) = \frac{d \arcsin(y)}{dy} \sqrt{1 - \sin^2(x)} \stackrel{\sin(x)=y}{\Rightarrow} \frac{d \arcsin(y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ,

(c)  $1 = \frac{d \arctan(y)}{dy} \frac{d \tan(x)}{dx} = \frac{d \arctan(y)}{dy} \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{d \arctan(y)}{dy} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \stackrel{\tan(x)=y}{\Rightarrow} \frac{d \arctan(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$ ,

(d)  $1 = \frac{d \sqrt{y}}{dy} \frac{dx^2}{dx} = \frac{d \sqrt{y}}{dy} 2x \stackrel{x^2=y}{\Rightarrow} \frac{d \sqrt{y}}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ .

## l'Hospitalovo pravidlo

### Základní limity

Nejprve zkuste odvodit nám již známé limity, které jsme zatím ne všechny uměli dobře zdůvodnit

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x}$ .

Poznamenejme, že všude jsou splněny předpoklady věty.

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1,$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin(x)}{2x} \stackrel{\text{l'H}}{=} -\frac{1}{2},$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1,$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = 0.$

**Vhodné na l'Hospitala**Spočítejte následující limity pro  $\alpha > 0$ 

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)},$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x,$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha+x)^x - \alpha^x}{x^2},$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3},$

(h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)},$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1},$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)},$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}.$

Opět, kde l'Hospitala použijeme, tam ho můžeme použít, ale je třeba to ověřit

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1,$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha+x)^x - \alpha^x}{x^2} &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((\alpha+x)^x)' - \ln(\alpha)\alpha^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x \ln(\alpha+x)})' - \ln(\alpha)\alpha^x}{2x} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\alpha+x)} (x \ln(\alpha+x))' - \ln(\alpha)\alpha^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha+x)^x (\ln(\alpha+x) + \frac{x}{\alpha+x}) - \ln(\alpha)\alpha^x}{2x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha+x)^x (\ln(\alpha+x) + \frac{x}{\alpha+x})^2 + (\alpha+x)^x (\frac{1}{\alpha+x} + (1 - \frac{\alpha}{\alpha+x})') - \ln^2(\alpha)\alpha^x}{2} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha+x)^x (\ln(\alpha+x) + \frac{x}{\alpha+x})^2 + (\alpha+x)^x (\frac{1}{\alpha+x} + \frac{\alpha}{(\alpha+x)^2}) - \ln^2(\alpha)\alpha^x}{2} = \\ &\frac{(\ln(\alpha))^2 + (\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2}) - \ln^2(\alpha)}{2} = \frac{(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2})}{2} = \frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{2x} = 0,$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1,$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{3x^2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{6x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)e^x}{6} = \frac{1}{6},$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin(x^2)}{2x \sin(x^2) + x^2 2x \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin(x^2)}{2x \sin(x^2) + x^2 2x \cos(x^2)},$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\frac{1}{x}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1,$

(h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\tan(x))}{\tan(2x)}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\frac{1}{\tan(x) \cos^2(x)}}{-\frac{\tan^2(2x)}{\cos^2(2x)}}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{-\frac{\tan^2(2x)}{2 \tan(x)}} = 1,$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(2e^x-1)}{\frac{x^2+1}{x}}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{2e^x}{2e^x-1}}{\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2e^x(x^2+1)^2}{(2e^x-1)(1-x^2)}} = e^2.$

## Nevhodné na l'Hospitala

Konečně se podívejme na limity, kde nám l'Hospital nepomůže. Zkuste si bezhlavě aplikovat l'Hospitala a pak říct, proč to nefunguje

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\sin(x) + \cos(x)}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3}, \quad (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin(x)}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x+5}{5x+5!}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

(a) Zde nejsou splněny předpoklady věty. Vidíme ale, že čítec jde do nekonečna a jmenovatel periodicky mění znaménko a tedy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\sin(x) + \cos(x)}$  neexistuje.

(b) Tady není problém, stačí dosadit  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x+5}{5x+5!} = \frac{30}{25+5!}$ . Pokud bychom ale aplikovali l'Hospitala, tak  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x+5}{5x+5!} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{5!} = 1$ . Takže předpoklady jsou důležité.

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+3}}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}$ , což je opět výraz stejného typu a z cyklu se nikdy nedostaneme. l'Hospital je říká, že obě limity se rovnají, ne že tudy vede cesta k výpočtu. Skutečně pokud zlomek zjednodušíme, tak  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = 2$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ , což je opět cyklus. Zase nám ale pomůže prostá úprava  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin(x)} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \cos(x)}$ , která ale neexistuje. Řešení je ale celkem snadné pomocí krácení  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = 1$ .