

Cvičení 7: Derivace

Snadné derivace

Spočtete následující derivace

(a) $\frac{d \tan(x)}{dx}$,

(c) $\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$,

(d) $\frac{d \log_x(2)}{dx}$,

(b) $\frac{d \sin(x^2)}{dx}$,

(e) $\frac{d|x|}{dx}$.

Obtížnější derivace

Vzorce

Spočtete následující derivace

(a) $\frac{d5^x}{dx}$,

(c) $\frac{d}{dx} \frac{(\ln(x))^x}{x^{\ln(x)}}$,

(e) $\frac{d}{dx} x^{5^{x^5}}$.

(b) $\frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dx}$,

(d) $\frac{d}{dx} \frac{\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{5!(5^5+x^5)^5}$,

Inverzní funkce

Pomocí $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \frac{df^{-1}(y)}{dy} \frac{df(x)}{dx} = 1$ spočtete derivace fcí inverzních k

(a) e^x ,

(b) $\sin(x)$,

(c) $\tan(x)$,

(d) x^2 .

l'Hospitalovo pravidlo

Základní limity

Nejprve zkuste odvodit nám již známé limity, které jsme zatím ne všechny uměli dobře zdůvodnit

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$,

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$,

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x}$.

Vhodné na l'Hospitala

Spočtete následující limity pro $\alpha > 0$

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)}$,

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha+x)^x - \alpha^x}{x^2}$,

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$,

(h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$,

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}$,

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Nevhodné na l'Hospitala

Konečně se podívejme na limity, kde nám l'Hospital nepomůže. Zkuste si bezhlavě aplikovat l'Hospitala a pak říct, proč to nefunguje

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\sin(x) + \cos(x)}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3}$,

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin(x)}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x+5}{5x+5!}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

Užitečné vztahy

Derivaci definujeme pomocí

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f = f' (= f_{,x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Derivace vyššího řádu (tady k) značíme

$$\frac{d^k f}{dx^k} = f^{(k)} (= f_{,x\dots x}) = \underbrace{\frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{k\text{-krát}} f.$$

Na cvičení 7 jsme spočítali základní limity

$$(a) \frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(d) \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

$$(b) \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x),$$

$$(e) \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$(c) \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x),$$

$$(f) \frac{d\arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dále na přednášce se dokázalo (pro $f(x), g(x)$ fce a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$(a) \frac{df \cdot g}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx},$$

$$(c) \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \frac{dg(x)}{dx},$$

$$(b) \frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx},$$

$$(d) \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Pro výpočet limity ve které se vyskytuje neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$, nebo $\frac{0}{0}$ lze použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$