

## Cvičení 4: Posloupnosti II

### Zahřívací příklady

Spočtete následující limity

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{2n}{2}\right),$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n^2 + 24}{10n^3 + n^2 - 4},$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!,$

(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi n + 10^{10} \sin(n!)),$

(h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{\sqrt{2n^4 + 4n^2 + 2}},$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n},$

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-3)^n}{2^n}.$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!},$

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{2n}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

(b) Protože máme odhad  $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$  a i ten diverguje, bude divergovat i faktoriál.

(c) Přímo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\pi n)}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{10^{10} \sin(n!)}_{< 10^{10}} = \infty.$$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1^n} = 0.$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n!)}{n}} = \infty.$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n^2 + 24}{10n^3 + n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + \frac{3}{n} + \frac{24}{n^3}}{10 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}} = \infty.$

(g) Použijeme odhad  $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ , tedy pomocí Věty o dvou polícajtech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

(h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{\sqrt{2n^4 + 4n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{2 + \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

(i) Pro lichá čísla dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{2^n} = 0,$$

zatímco pro sudá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n}{2^n} = \infty.$$

Limita tedy neexistuje.

## Složitější příklady

Spočítejte následující limity pro  $k, l \in \mathbb{N}$  a  $\delta, \beta \in \mathbb{R}$

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n},$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2 \sum_{i=1}^n i}{n^2},$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3},$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}, \quad q \in \mathbb{R},$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2}{\sqrt{16 - \frac{1}{n}} - 4},$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n} + \frac{5}{\ln(n)}},$

(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[k]{1 + \frac{\delta}{n}} \sqrt[l]{1 + \frac{\beta}{n}} - 1 \right),$

(h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^5 + n!},$

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}},$

(j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}),$

(k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right),$

(l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{\cos(\pi n)},$

(m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( \delta + \frac{\beta}{n} \right) + \left( \delta + \frac{2\beta}{n} \right) + \dots + \left( \delta + \frac{(n-1)\beta}{n} \right) \right],$

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} \stackrel{\text{dříve}}{=} 1.$

(b) Pomocí součtu řady viz cvičení 2 máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2 \sum_{i=1}^n i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2 \frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = 0.$$

(c) Fce  $\arctan(x)$  je omezená a tedy triviálně  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3} = 0.$

(d) Pro  $|q| < 1$  máme podíl typu " $\frac{0}{\infty} = 0$ ". Jinak lze použít dříve dokázaný odhad  $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$  a fakt, že tento podíl je nezáporný

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2q^2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{2} \ln\left(\frac{2q^2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\underbrace{\frac{\ln(2q^2)}{2}}_{>0} \underbrace{n \ln(n)}_{\rightarrow \infty}} = 0.$$

(e) Vhodně rozšíříme jmenovatele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2}{\sqrt{16 - \frac{1}{n}} - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2}{\left(\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2\right) \left(\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} + 2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} + 2\right)} = \frac{1}{4}.$$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n} + \frac{5}{\ln(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{2}{n} + \frac{5}{\ln(n)}\right) \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \ln(n)}{n} + 5 \frac{\ln(n)}{\ln(n)}} = e^5.$

(g) Onačme  $\sqrt[k]{1 + \frac{\delta}{n}} \sqrt[l]{1 + \frac{\beta}{n}} =: a(k, l)$ . Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a(k, l) - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a^{kl}(k, l) - 1}{a^{kl-1}(k, l) + a^{kl-2}(k, l) + \dots + a(k, l)},$$

kde  $a^{kl}(k, l) - 1 = \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^l \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^k - 1 = \frac{l\delta + k\beta}{n} + \dots$ , kde členy  $\dots$  obsahují ve jmenovateli  $n^2$  a víc, které se v limitě neprojeví. Dále je vidět, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(k, l) = 1$  a ve jmenovateli je takových členů právě  $kl$ , tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[k]{1 + \frac{\delta}{n}} \sqrt[l]{1 + \frac{\beta}{n}} - 1 \right) = \frac{l\delta + k\beta}{kl}.$$

(h) Už víme, že faktoriál roste rychleji než polynom libovolného řádu i libovolná exponenciála. Proto stačí odhadnout  $\frac{3^n+n^5}{n^5+n!} \leq \frac{3^n+n^5}{n!}$ . Odtud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+n^5}{n^5+n!} = 0$ .

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} - 1}{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}} = 1. \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n^2+2)^3 - (n^3+1)^2}{\sum_{i=0}^5 (n^2+2)^{\frac{i}{2}} (n^3+1)^{\frac{5-i}{3}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^6 + 6n^4 + 12n + 8 - n^6 - 2n^3 - 1}{\sum_{i=0}^5 (n^2+2)^{\frac{i}{2}} (n^3+1)^{\frac{5-i}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{6n^4 - 2n^3 + 12n + 7}{n^5 \sum_{i=0}^5 (1 + \frac{2}{n^2})^{\frac{i}{2}} (1 + \frac{1}{n^3})^{\frac{5-i}{3}}} = 1. \end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(n+1)}{2n+4} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(n+1) - n(n+2)}{2n+4} \right) = -\frac{1}{2}.$$

(l) Čítec diverguje, ale jmenovatel je vlastně  $(-1)^n$ , takže limita neexistuje.

(m)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( \delta + \frac{\beta}{n} \right) + \left( \delta + \frac{2\beta}{n} \right) + \dots + \left( \delta + \frac{(n-1)\beta}{n} \right) \right] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( n\delta + \frac{\beta}{n} (1+2+\dots+(n-1)) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( n\delta + \frac{\beta n(n-1)}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \delta + \beta \frac{(n-1)}{2n} \right) = \delta + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

## Rekurentní posloupnosti

Najděte limity posloupností zadaných jako  $a_{n+1} = f(a_n)$

(a)  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right),$

(b)  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 1,$

(c)  $a_1 = \sqrt{c}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad c > 0.$

Klíčové v tomto oddílu je si uvědomit, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ . Pokud tedy existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ , pak

- (a) Pokud limita existuje, musí pro ni platit  $a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right) \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$ . Protože členy posloupnosti jsou kladné, je přípustné pouze kladné řešení. Nyní musíme ukázat konvergenci, k čemuž postačí monotonie a omezenost ze “správné strany”. Omezenost plyne z AG nerovnosti<sup>1</sup>

$$\frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right) \geq \sqrt{a \frac{2}{a}} = \sqrt{2}.$$

Navíc je posloupnost klesající, protože

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) - a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{2 - a_n^2}{a_n} \right) \leq 0,$$

takže je konvergentní k  $\sqrt{2}$ .

- (b) Tato posloupnost zjevně diverguje. Je to vidět i z limitního přechodu  $a = a + 1$ , což nejde v  $\mathbb{R}$  splnit.

- (c) Posloupnost je zjevně rostoucí protože<sup>2</sup>

$$a_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n\text{-krát}}.$$

Dále je ale i omezená, protože

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \\ \Leftrightarrow c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}} &\leq \frac{1 + 2\sqrt{1 + 4c} + 1 + 4c}{4} \Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + 2\sqrt{1 + 4c} + 1 + 4c - 4c}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sqrt{c} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}, \end{aligned}$$

což zjevně platí. Faktor, kterým je posloupnost omezená jsme získali tak, že jsme chtěli v dalším kroku stejnou pravou stranu nerovnice. Horní odhad  $\delta(c)$  tedy musí splňovat  $\delta(c) = \delta^2(c) - c \Leftrightarrow \delta(c) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$ .

Nyní už je triviální limitu spočítat pomocí  $a = \sqrt{a + c} \Rightarrow a = \delta(c) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$ , protože nás zajímají pouze kladná řešení (členy posloupnosti jsou kladné).

---

1

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

<sup>2</sup>Můžete si zkusit porovnat sousední členy a umocnit  $n$ -krát.