

Cvičení 4: Posloupnosti II

Zahřívací příklady

Spočtěte následující limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{2n}{2}\right),$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n!,$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi n + 10^{10} \sin(n!)),$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n},$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!},$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n^2 + 24}{10n^3 + n^2 - 4},$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{\sqrt{2n^4 + 4n^2 + 2}},$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-3)^n}{2^n}.$

Složitější příklady

Spočtěte následující limity pro $k, l \in \mathbb{N}$ a $\delta, \beta \in \mathbb{R}$

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2 \sum_{i=1}^n i}{n^2},$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3},$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}, \quad q \in \mathbb{R},$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2}{\sqrt{16 - \frac{1}{n}} - 4},$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n} + \frac{5}{\ln(n)}},$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[k]{1 + \frac{\delta}{n}} \sqrt[l]{1 + \frac{\beta}{n}} - 1 \right),$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^5 + n!},$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}},$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}),$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right),$

(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{\cos(\pi n)},$

(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\delta + \frac{\beta}{n} \right) + \left(\delta + \frac{2\beta}{n} \right) + \dots + \left(\delta + \frac{(n-1)\beta}{n} \right) \right],$

Rekurentní posloupnosti

Najděte limity posloupností zadaných jako $a_{n+1} = f(a_n)$

(a) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right),$

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1,$

(c) $a_1 = \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad c > 0.$

Užitečné vztahy

Pro $a \in \mathbb{R}$ jsou definované výrazy $a \pm \infty$, $\pm(\infty + \infty)$, $a \cdot (\pm\infty)$, $\frac{a}{\pm\infty}$ a pro $a \neq 0$ i $\frac{\pm\infty}{a}$. Jiné výrazy s nekonečny nejsou dobře definované.

Nechť a_n , b_n a c_n jsou posloupnosti a $a \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.
2. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a b_n je podposloupnost a_n . Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
3. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je nezávislé na n , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.
4. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a b_n je omezená. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
5. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.
6. Nechť $a_n \geq 0 \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \ln(a_n)}$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$