

## Řešení cvičení 3: Posloupnosti

### Výpočet z definice

Přímo pomocí definice spočítejte následující limity<sup>1</sup>, nebo dokažte, že neexistují

(a)  $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(d)  $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(b)  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(e)  $\{\frac{1}{1+n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(c)  $\{\ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(f)  $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ .

(a) Limita je zjevně 1, protože pro libovolné  $a_n$  máme  $a - a_n = 0 < \epsilon$  pro všechna  $\epsilon > 0$ . Pro libovolné zadané  $\epsilon$  nám tedy stačí zvolit  $\tilde{n} = 1$ , nebo libovolné jiné přirozené číslo.

(b) Je vidět, že  $\forall a_n : a_n > 0$  a posloupnost je klesající. Limita ale nemůže být větší než 0, protože pro  $a > 0$  bychom mohli najít  $a_n < a$ . Zkusme tedy  $a = 0$ . Potom pro zadané  $\epsilon > 0$  chceme najít  $\tilde{n}$  tak, aby  $a_{\tilde{n}} = \frac{1}{\tilde{n}} < \epsilon$ . To jistě jde udělat volbou  $\tilde{n} = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 5$ . Protože je posloupnost klesající, bude nerovnost platit  $\forall n : n > \tilde{n}$ .

(c) Spojitý logaritmus není shora omezen a tak se dá čekat, že jeho diskrétní podoba bude mít nevlastní limitu  $+\infty$ . Pro zadané  $K \in \mathbb{R}$  chceme tedy najít  $\tilde{n}$  tak, že  $a_{\tilde{n}} = \ln(\tilde{n}) > K$ . Odtud tedy dostáváme, že stačí  $\tilde{n} = \lceil e^{K+1} \rceil$ . Z monotonie  $\ln$  opět plyne zbytek.

(d) Stačí použít triviální odhad  $n! > n$  a je vidět, že posloupnost bude mít nevlastní limitu  $+\infty$ . Pro zadané  $K$  lze volit  $\tilde{n} = K$ .

Za povšimnutí stojí, že v tomhle případě se s opravdu špatným odhadem pracuje dobře. Nejde nám o to odhadnout funkci přesně, když si můžeme pomoci, jde s odhadem “plýtvat”. Jak špatný odhad  $n! > n$  je jsme viděli už ve cvičení 2, kdy se nám podařilo odhadnout  $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ , neboli faktoriál roste rychleji než libovolný polynom (a ukáže se, že i než libovolná exponenciála).

(e) Po přeznačení  $n \leftarrow n + 1$  dostáváme přesně příklad (b) až na první člen posloupnosti. Ten jde ale bez problémů odebrat, protože limita posloupnosti nezáleží na konečném počtu jejích členů. Jde tedy příslušně posunout vztah pro  $\tilde{n}$  určený výš.

(f) Použijeme Větu o dvou policajtech s pomocnými posloupnostmi  $\{0\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{\frac{1}{1+n}\}_{n=1}^{\infty}$ . Pro všechna  $n$  platí  $0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n}$  a tedy jsou splněny předpoklady věty a i tato posloupnost jde k 0. K určení  $\tilde{n}$  použijeme stejný postup jako výše, tedy

$$\left| \frac{1}{1+n^2} - 0 \right| = \frac{1}{1+n^2} < \epsilon \Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1} \Rightarrow \tilde{n} = \lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rceil + 1.$$

<sup>1</sup>Napište pravidla jak volit  $\tilde{n}$  pro libovolná zadaná  $\epsilon$ , nebo  $K$ .

## Typické příklady na triky

Následující příklady Vás mají naučit “trikům” pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n},$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right),$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sin(n^n)},$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n)}{n},$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n + n^8}{5^n + 10n^2},$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$

Následující příklady Vás mají naučit “trikům” pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

(a) Stačí použít odhad  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n!)}{n} \leq \frac{1}{n}$  a Větu o dvou policajtech (Uřítečné vztahy bod 5). Dostáváme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n} = 0.$

(b) Protože  $\sin(x) \in [-1, 1]$ , bude výsledek oscilovat a narůstat. Neboli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sin(n^n)}$  neexistuje.

(c) Jak jsme zjistili minule, exponenciála roste rychleji než polynom a tak stačí vhodně rozšířit výraz a dostaneme výraz typu  $\frac{0}{1}.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n + n^8}{5^n + 10n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{n^8}{5^n}}{1^n + \frac{10n^2}{5^n}} = \frac{5 \cdot 0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

(d) Jak je není výraz dobře definován. Musíme tedy udělat úpravu ve tvaru vhodného rozšíření, abychom odstranili problematické odečítání.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 1.$$

(e) Použijeme vybranou podposloupnost  $n = 2^k$ . Zjevně  $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow k \rightarrow \infty$ . Odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n)}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2(2^k)}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

Všimneme si, že tohle tvrzení platí stejně pro jmenovatel typu  $n^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Plyne z toho, že logaritmus roste pomaleji než polynom.

(f) Tahle limita je typu “ $1^\infty$ ”, na což používáme exponencializaci. Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n)} = e^0 = 1.$$

Což jsme dostali z minulého příkladu.

## Výpočet

Spočítejte limity následujících posloupností, nebo ukažte, že neexistují

- (a)  $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ , (g)  $\left\{\frac{2^n + 10^n}{10^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  
 (b)  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ , (h)  $\left\{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  
 (c)  $\{(-1)^{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ , (i)  $\left\{n\left(\sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  
 (d)  $\left\{\frac{n!}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , (j)  $\left\{\frac{1+2+\dots+n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  
 (e)  $\left\{\frac{q^n}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $q > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , (k)  $a_n = \begin{cases} 2^{10\pi n}, & n < 1000 \\ \frac{n^5}{n^6 + n!}, & \text{jinak} \end{cases}$ .  
 (f)  $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,

- (a) Stačí výraz rozšířit vhodným doplněním podle  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , neboli

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Čitatel je konstanta a jmenovatel je neomezený a kladný, takže máme výraz typu “ $+\frac{1}{\infty}$ ”, takže poslounost jde do 0.

- (b) Limita této posloupnosti neexistuje. To je jasné z toho, že po sobě následující členy jsou vzdáleny 2. Tedy nepůjde najít člen posloupnosti, od kterého jsou členy vzdáleny od nějakého čísla méně jak např.  $\epsilon = 0.5$ .  
 (c) Oproti předchozímu příkladu se situace mění, protože pro  $n > 1$  je  $n!$  sudé číslo. Proto  $(-1)^{n!} = 1$  pro  $n > 1$  a tedy až na první člen, který o limitním chování nerozhoduje dostáváme  $\{1\}_{i=1}^{\infty}$  a limita zkoumané posloupnosti je 1.  
 (d) Pokud si vzpomeneme na již zmiňovaný výsledek z cvičení 2, příklad 3.2 (c)  $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ , tak jde udělat odhad

$$\frac{n!}{n^k} \geq \frac{1}{n^k} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} > n^{\frac{n}{2k}},$$

což diverguje a tedy diverguje i zkoumaná poslounost. Poučení tedy zní “faktoriál roste rychleji než polynom libovolného řádu”.

- (e) Uvažujme případ  $k = 1$ , který ale není nijak zvláštní, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q^n}{n}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{q}^n}{n}\right)^k,$$

kde  $\tilde{q} = q^{\frac{1}{k}}$ . Potom jde s výhodou použít odhad platný pro  $n \geq 2$  a  $x > 0$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x,$$

tedy pro  $q = 1 + x$  (víme  $q > 1$ , tedy  $x > 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^n}{n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + x + \frac{n-1}{2}x = 0 + x + \infty = \infty.$$

- (f) Sinus je funkce omezená a tedy jde členy posloupnosti odhadnout  $|\frac{\sin(n)}{n}| < \frac{1}{n}$ . S výhodou pak jde použít Větu o dvou policajtech na posloupnosti  $\{\pm\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ , které jsou obě k nule viz výše. Limita zkoumané posloupnosti je tak taky 0.

(g) Po úpravě dostáváme

$$\frac{2^n + 10^n}{10^{n+1}} = \frac{1}{10} \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^n + 1^n}{1^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10}.$$

(h) Limita opět neexistuje, což jde ukázat podobně jako v (b), protože pro sudá  $n$  dostáváme právě (b) (až na znaménko, což je jen posunutí).

(i) Prostým zkoumáním limit samotných výrazů dostáváme

$$\underbrace{n}_{\rightarrow \infty} \left( \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1}_{\rightarrow 0} \right).$$

Máme tedy neurčitý výraz typu “ $\infty \cdot 0$ ”. Řešení spočívá v úpravě, kterou jsme použili už v (a)

$$n \left( \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right) = n \frac{\frac{1}{n} + 1 - 1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

(j) Řadu v čitateli jde sečíst pomocí výsledků z minulých cvičení  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ . Odtud dostáváme

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

(k) Protože konečný počet prvků nerozhoduje o limitním chování, můžeme prvních 1000 členů zahodit. Pro zbytek použijeme odhad

$$0 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} 0 < \frac{n^5}{n^6 + n!} < \frac{n^5}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

jak jsme již ukázali v (d).