

## Cvičení 2: Funkce

### Skládání fcí

Určete  $f \circ f \circ f \circ f$  pro

(a)  $f(x) = 2x + 1$ ,

(b)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

Pokuste se napsat vzorec pro  $i \in \mathbb{N}$  složených fcí  $f$ .

### Spočetnost množin

Pomocí konstrukce bijektivního zobrazení z/do  $\mathbb{N}$  ukažte, že následující množiny jsou spočetné

1.  $\mathbb{Z}$ ,

3.  $\mathbb{Q}$ ,

2.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

4.  $\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n\text{-krát}}$ .

### Monotonie

Rozhodněte o monotonii následujících posloupností

(a)  $\{n^2 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(d)  $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(b)  $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(c)  $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ,

(e)  $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$ .

### Konstrukce funkce

Zkonstruujte funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  s následujícími vlastnostmi

(a)  $f$  je prostá, ale není na,

(b)  $f$  je na, ale není prostá,

(c)  $f$  je na a každý prvek v obrazu má nekonečně mnoho vzorů.

### Min/Max/Sup/Inf fcí

Pro následující funkce najděte jejich minima, maxima, suprema a infima následujících množin

(a)  $\{1 | n \in \mathbb{N}\}$ ,

(d)  $\{\cos(x) | x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)\}$ ,

(b)  $\{\sin(\frac{\pi}{2}n) | n \in \mathbb{N}\}$ ,

(e)  $\left\{\frac{x}{1+x} | x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)\right\}$ ,

(c)  $\{\sin(n) | n \in \mathbb{N}\}$ ,

(f)  $\left\{\frac{1}{x-1} | x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)\right\}$ .

## Užitečné poznámky

Mějme množiny  $A, B, C$ . Potom

- fce  $f : A \rightarrow B$  je zobrazení (předpis), který každému  $x \in A$  přiřazuje nějaké  $f(x) \in B$ . Obraz množiny  $A$  je množina

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\},$$

- inverzní fce k  $f$  je  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , která pro libovolnou dvojici  $x \in A$  a  $y \in B$  splňuje

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

- složení dvou zobrazení  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow C$  je fce  $h : A \rightarrow C$  splňující  $h(x) = g(f(x)) \forall x \in A$ . Používá se značení  $h = g \circ f$ .

Fce  $f : A \rightarrow B$  je

- prostá, pokud  $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ,
- na (neboli surjektivní), pokud  $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$ ,
- bijekce, pokud je  $f$  prostá a na.

Pro  $M \subseteq \mathbb{R}$  a  $x \in M$  platí, že

- $x$  je maximum  $M \Leftrightarrow \forall a \in M : a \leq x$ .
- $x$  je minimum  $M \Leftrightarrow \forall a \in M : a \geq x$ .
- $x$  je supremum  $M \Leftrightarrow (\forall a \in M : a \leq x) \wedge (\forall \epsilon > 0 \exists b \in M : x - \epsilon \leq b)$ .
- $x$  je infimum  $M \Leftrightarrow (\forall a \in M : a \geq x) \wedge (\forall \epsilon > 0 \exists b \in M : x + \epsilon \geq b)$ .