Řešení cvičení 13: Proč studovat analýzu

Parciální derivace

Spočtěte parciální derivace

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x) = x^2$,

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x, y) = x^2 + y^2$,

(a) Zde je odpověď velice snadná. Parciální derivace fce jedné proměnné se redukuje na normální derivaci, kterou dobře známe, tedy $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$.

(b) Pokud držíme y fixní a měníme x, chová se y jako konstanta, tedy opět $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$.

Gradient

Určete gradient fcí

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$,

(b) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$.

Jaká je podmínka na to, aby měla f lokální extrém?

Příslušné derivace jsou triviální, tedy

(a) $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$,

(b) $\nabla f(x, y) = (\cos(x)\sin(y), \sin(x)\cos(y))$.

Zajímavé ale je si představit, co nám gradienty říkají. Přímočaré zobecnění nutné podmínky pro extrém fce jedné proměnné nám říká, že pokud má fce extrém a derivace v tom bodě existují, pak nutně je musí být její gradient v tom bodě nulový. Pokud by to tak nebylo, pak jde měnit souřadnici, které přísluší nenulová složka gradientu a tak získat vyšší hodnotu f.

Extrémy obecných fcí se takhle najít nedají, ale zrovna v případě (a) bychom dostali snadno $\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$, což ale není lokální extrém, jak je ukázáno na obrázku níž. V tomhle případě jde o tkz. sedlový bod, neboli pokud bychom se vychýlili ve směru x, pak f roste, ale ve směru y bude klesat. To je způsobeno tím, že druhé derivace v těchto směrech mají opačné znaménko.

Obecně jde v každém bode (podobně jako gradient) zkonstruovat matici všech možných druhých derivací, které se říká Hessova matice, nebo Hessián. Podmínka na lokální extrém jde pak zformulovat tak, že gradient je nulový a Hessián pozitivně/negativně definitní. To si jde taky představit tak, že má kladná/záporná vlastní čísla, neboli existuje souřadný systém tvořený vlastními vektory, kde odchylka libovolným směrem vede k čistému růstu/klesání.

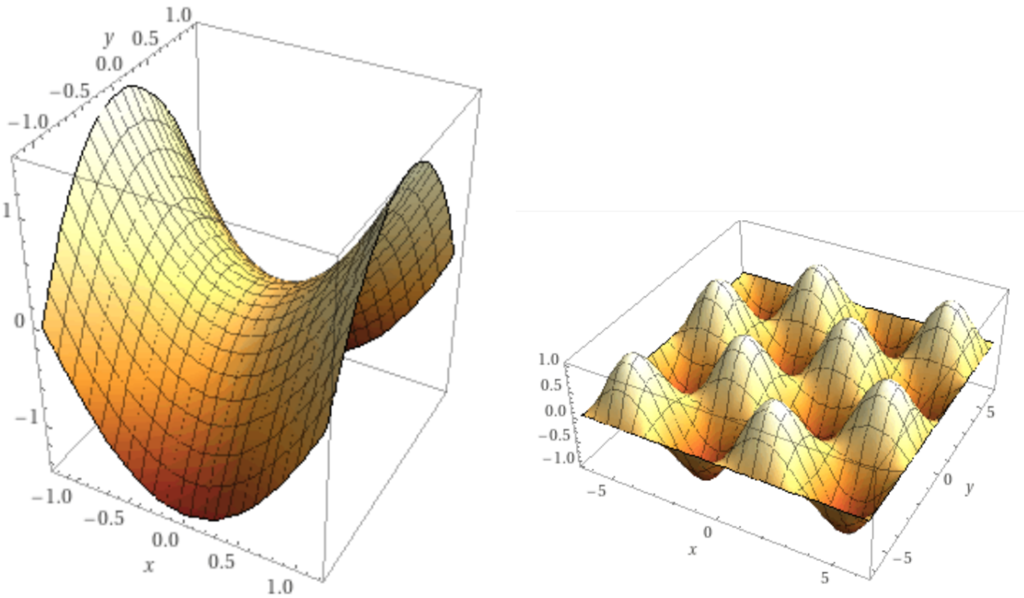
Diferenciální rovnice

(a) Uvažujte nakažlivou nemoc, která nejde vyléčit a "dnes" jí má N lidí. Zdrojem další nákazy jsou právě nemocní lidé, tedy počet nově nakažených za nějaké časové období bude úměrný počtu právě nakažených. Určete průběh počtu nakažených v čase, tedy $N(t)$.

Změna počtu lidí v čase je derivace podle času, tedy

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \beta N.$$

Tato rovnice se vlastně ptá "jaké musí být N, aby jeho derivace byla β-krát větší?" Je možné odpověď uhádnout, protože už takovou fci známe a je to exponenciála. Otázka je, jestli je jediná taková a z



Obrázek 1: Fce, jejíž gradient počítáme výše, (a) vlevo, (b) vpravo.

postupu níž vyplyne, že ano. Obecně je ale situace složitější a zejméně s řádem derivace roste počet řešení. Pro parciální diferenciální rovnice je situace dost složitá.

Pokud bychom řešení neuhodli, můžeme ho spočítat. Chtěli bychom rovnici převést na integrál a zdá se, že integrace podle času je dobrý nápad, protože

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}N = N + c.$$

Problém ale je na pravé straně, protože N je fcí času a my nevíme jakou a tak nedokážeme integrál spočítat. Můžeme ale rovnici přepsat na

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \beta$$

odkud integrací

$$\int \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \ln(N) + c =: \ln(N) + \ln(\tilde{c}).$$

Přeznačení konstanty na konci jde udělat vždy, protože obor hodnot logaritmu josu všechna reálná čísla. Integrál pravé strany je triviálně βt, kde bychom opět mohli přidat konstantu, ale tím nic dalšího nezískáme. Odečtením obou konstant získáme nějakou jinou, která je pořád obecná. Odtud už snadno

$$\ln(N) + \ln(\tilde{c}) = \ln(\tilde{c}N) = \beta t \Leftrightarrow N = \tilde{c}^{-1}e^{\beta t},$$

kde $\tilde{c}^{-1}$ je zase nějaká konstanta, kterou si můžeme označit třea α. Podstatné ale je, že počet nakažených roste exponenciálně s časem a to rychleji s větším β. To dává smysl, protože takhle se ve skutečnosti přesně definuje reprodukční číslo.

Drobná nerealističnost tohoto modelu spočívá v tom, že počet kanažených může růst do nekonečna, neboli máme nekonečně velkou populaci. Tenhle nedostatek odstraníme v dalším bodu. Jsou zde ale další - například reprodukční číslo by rozhodně mohlo záviset na čase, protože lidé mohou například zavést ochranná opatření. Nicméně pokud je β rozumně plochá fce, nebude situace tak odlišná, protože jde vždy udělat Taylora a tak získat aproximativní řešení diferenciální rovnice.

(b) Modifikujme předchozí model - nechť má naše populace konečně mnoho lidí N_{tot}. Definujme precento nakažených jako

$$n = \frac{N}{N_{\text{tot}}}.$$

Počet nově nakažených lidí bude klesat, pokud nemoc mají téměř všichni, tedy bude úměrný $n(1-n)$. Určete v téhle situaci průběh počtu nakažených jako fci času, tedy $n(t)$.

Analogicky předchozímu případu dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \beta n(1-n),$$

což už nejde tak snadno uhádnout. Budeme tedy muset použít analogický postup jako v minulém příkladu, tedy řešíme

$$\int \frac{1}{n(1-n)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{n(1-n)}\,\mathrm{d}n = \int \frac{1}{n} + \frac{1}{1-n}\,\mathrm{d}n = \ln(n) - \ln(1-n) + c =: \ln\left(\frac{n}{1-n}\right) + \ln(\tilde{c}).$$

Odtud tedy

$$\ln\left(\tilde{c}\frac{n}{1-n}\right) = \beta t \Leftrightarrow \frac{n}{1-n} = \frac{1}{1-n} - 1 = \tilde{c}^{-1}e^{\beta t} \Leftrightarrow n = 1 - \frac{1}{1+\tilde{c}^{-1}e^{\beta t}},$$

což je nám již dobře známá logistická regrese, která se hodně používá ve statictice a pravděpodobnosti.

Můžeme si povšimnout interpretace konstanty $\tilde{c}^{-1}$. Pokud totiž napíšeme $\tilde{c}^{-1} = e^{\alpha}$, což můžeme, protože $\tilde{c}^{-1} > 0$ viz dříve, pak

$$n = 1 - \frac{1}{1+e^{\beta t+\alpha}},$$

neboli nám říká posunutí v čase, resp. čas kdy je polovina populace nakažená. To totiž nastane pro $\beta t + \alpha = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\alpha}{\beta}$.

(c) Rozdělme populaci na tři kategorie

- S: susceptible, tedy ti co nemoc ještě neměli,
- I: infected, tedy ti co nemoc mají teď,
- R: removed, tedy uzdravení a umrtví.

Opět můžeme definovat procentuální hodnoty jako např. $s = \frac{S}{N}$.

Zformulujte soustavu diferenciálních rovnic pro tyto proměnné, pokud

- s klesá rychlostí úměrnou si, což je analogické minulému bodu,
- r roste úměrně počtu nakažených, neboli každý den se uzdraví nějaké procento nakažených,
- i roste úměrně si a zároveň klesá úměrně počtu nakažených.

Příslušné diferenciální rovnice říkají prostě

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -\alpha s(t)i(t),\\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \beta s(t)i(t) - \gamma r(t),\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \delta r(t).\end{aligned}$$

Tohle ale jistě není všechno, protože musí platit "zákon zachování lidí", neboli

$$0 = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s+i+r}{\mathrm{d}t} = -\alpha s(t)i(t) + \beta s(t)i(t) - \gamma r(t) + \delta r(t).$$

Protože s, i, r jsou obecné fce a tato rovnice musí platit v každém čase, musí nutně $\alpha = \beta$ a $\gamma = \delta$. To dává smysl, protože když někde onemocní, přesune se z s do i. Počet nových nakažených ale musí souhlasit, tedy $\alpha = \beta$. Podobně pro druhou podmínku.

Co jsme dostali se označuje ze zjevných důvodů SIR model a používá se k modelování šíření nemocí, tweetů a dalších nakažlivých věcí.

Tato soustava nejde vyřešit obecně, přestože vypadá celkem nevinně. Zkusmě naznačit, jak najít řešení numericky. Derivaci jsme definovali pomocí limity $h \to 0$, ale to není pro počítač praktické, protože můžeme reprezentovat jen konečně malá čísla. Budeme tedy uvažovat aproximaci derivace, která je vlastně Taylorův rozvoj do prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Potom direfenciální rovnice říká

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = g \Leftrightarrow \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(t) \Leftrightarrow f(t+h) = hg(t) + f(t),$$

neboli pro fixní h můžeme dostat odhad pro hodnotu f v dalším čase[1]. Tenhle odhad bude lepší, pokud bude h menší jak víme z Taylorova rozvoje, ale pro příliš malá h dojde k velkým zaokrouhlovacím chybá. Je tedy třeba dělat kompromisy.

S touto znalostí můžeme zadefinovat pro SIR model vektor proměnných

$$(s(t), i(t), r(t))^T := x(t)$$

a s použitím této proměnné a aproximace derivace výše dostáváme

$$x(t+h) = h \begin{pmatrix} -\alpha s(t)i(t) \\ \alpha s(t)i(t) - \gamma r(t) \\ \gamma r(t) \end{pmatrix} + x(t).$$

Pokud známe nějakou počáteční hodnotu pro x, můžeme pomocí této rovnice dostat x o kousek později atd. jak daleko jen budeme chtít.

Podobným způsobem jde získat řešení široké třídy diferenciálních rovnic tak vyřešit celou řadu reálných problémů, které tady ani nebudu vyjmenovávat.

[1] Téhle aproximaci se říká Eulorova. Existují celé řady dalších, které například adaptivně měnívelikost h, aby minimalizovali chybu.