Řešení domácího úkolu 12

1. Spočtěte následující integrály

(a)

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}},$$

(2 body)

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = y \\ \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = 2\int_0^2 \frac{y}{1+y}\ \mathrm{d}y = 2\int_0^2 1 - \frac{1}{1+y}\ \mathrm{d}y =$$

$$2\left[y - \ln(1+y)\right]_0^2 = 2(2 - \ln(3)).$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x,$$

(2 body)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \cos(x) = y \\ -\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y(1+y^2)}\ \mathrm{d}y =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y(1+y^2)}\ \mathrm{d}y,$$

kde

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A(1+y^2)+By^2+Cy}{y(1+y^2)} \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 0.$$

Tedy

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y(1+y^2)}\ \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\ \mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{c} y^2 = z \\ 2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{1+z}\ \mathrm{d}z =$$

$$[\ln(y)]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}[\ln(1+z)]_{\frac{1}{4}}^1 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right).$$

2. Spočtěte[1] objem a povrch toroidu (donutu) s "hlavním poloměrem" R a "vedlejším poloměrem" r, viz obrázek.

(3 body)

První krok je formulace fce, kterou budeme chtít následně použít ve vzorcích pro objem a povrch. Abychom mohli použít vzorec pro rotaci kolem osy x, musíme tak napsat dovnici pro kružnici, která má poloměr r a střed v $(x, y) = (0, R)$. To je přesně

$$r^2 = x^2 + (y-R)^2 \Rightarrow y_\pm = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Vyšly nám tedy funkce dvě, což není překvapivé, protože kruh jako takový není fce, protože by jednomu x přiřazoval více y.

[1] Neboli nejde jen odhadnout správný výsledek.

Začněme výpočtem objemu. Tam je třeba si uvědomit, že rotací y_+ dostaneme i vnitřek toru, který do objemu započítat nechceme. Je to ale přesně ta část, která vznikne rotací y_-, takže

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}x - \int_{-r}^{r} \pi \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}x = 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x \overset{\text{Wolfram}}{=} 4R\pi \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2.$$

Naopak povrch vznikne tak, že sečteme povrchy vzniklé rotací y_+ a y_-

$$S = \int_{-r}^{r} 2\pi y_+(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y_+(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} \, \mathrm{d}x + \int_{-r}^{r} 2\pi y_-(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y_-(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} \, \mathrm{d}x,$$

kde

$$y_\pm(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y_\pm(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \left(R \pm \sqrt{r^2 - x^2}\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{rR}{\sqrt{r^2 - x^2}} \pm r,$$

neboli

$$S = 4\pi r R \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi r R \pi = 4\pi^2 r R.$$