Domácí úkol 12

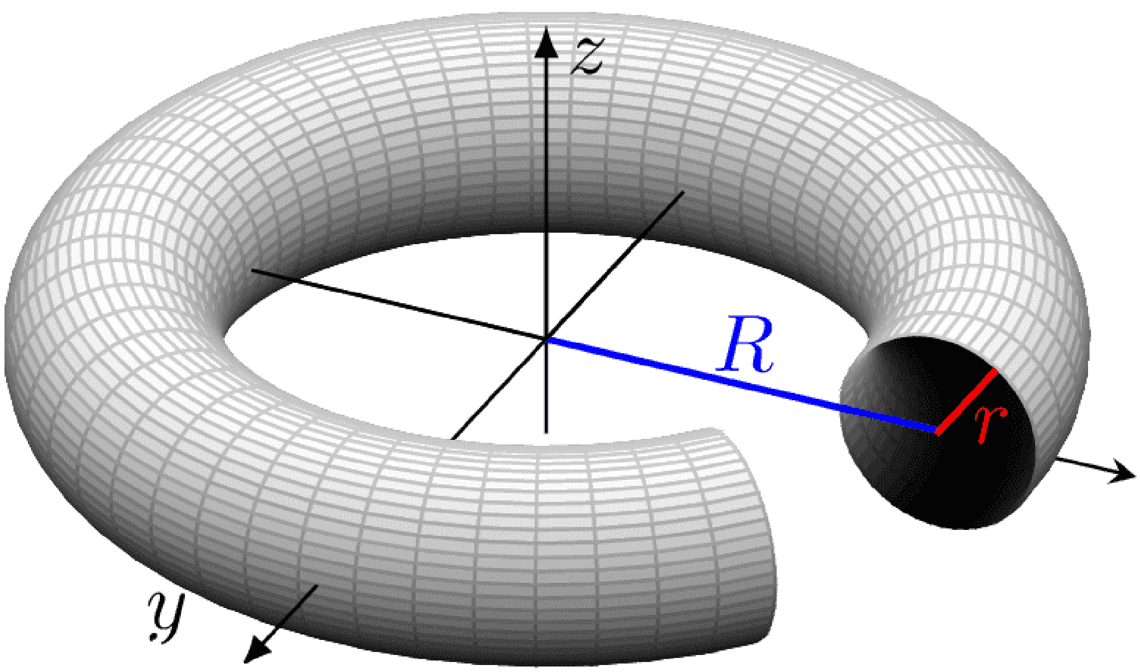
1. Spočtěte následující integrály

   (a)
   $$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}},$$
   (2 body)

   (b)
   $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1+\cos^2(x)}\, \mathrm{d}x,$$
   (2 body)

2. Spočtěte[1] objem a povrch toroidu (donutu) s “hlavním poloměrem” R a “vedlejším poloměrem” r, viz obrázek.

   (3 body)



Obrázek 1: Torus.

[1]Neboli nejde jen odhadnout správný výsledek.

Bonus: (odevzdávejte do prvního zápočtového testu)
V tomto úkolu spočteme (určitý) Gaussův integrál.

1. Jak bylo řečeno na cvičeních, neurčitý integrál

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

   neexistuje. Nicméně plocha pod touto křivkou by měla být jistě konečná, jak je patrné z Obrázku 1. Ukažte to tak, že najdete funkce splňující

   - $f_-(x) \leq e^{-x^2} \leq f_+(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$,
   - $f_\pm(x)$ jsou integrovatelné přes $\mathbb{R}$ a tento integrál je konečný.

2. K výpočtu použijeme trik, který byl opravdu prvním známým postupem pro výpočet tohoto integrálu. Budeme uvažovat součin dvou integrálů typu

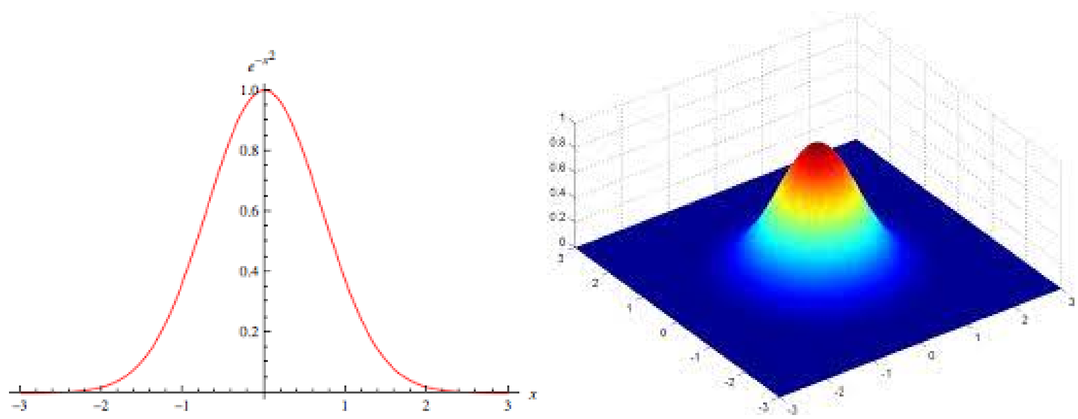
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Takto upravte I^2 - je třeba si uvědomit, že při integraci podle např. x se fce např. y chová jako konstanta.

3. Tento výsledek je zajímavý hlavně v tom, že integrand je fcí $x^2 + y^2$. To naznačuje, že výsledek bude rotačně symetrický.

   My umíme objem rotačně symetrického tělesa spočítat i jiným způsobem, viz poslední cvičení. Problém ale je, že ten vzorec je pro rotačně symetrické těleso podél x. V tomhle případě máme ale rotační symetrii kolem y a proto budeme muset nejprve určit funkci inverzní a poté ji zintegrovat přes vhodný interval.

4. Tím dostaneme objem rotačně symetrického tělesa a ten jak jsme řekli výše je roven I^2. Odtud už snadno dostaneme hodnotu hledaného určitého integrálu.



Obrázek 2: Gaussův integrál I (vlevo) a jeho 2D varianta I^2 (vpravo).

(3 bonusové body)