Cvičení 12: Určitý integrál II

Výpočet

Spočtěte následující integrály pro $k \in \mathbb{N}_0$

(a) $\int_0^2 \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^9 x^3 \sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$.

Oblasti mezi křivkami

Spočtšte obsah plochy ohraničené následujícími křivkami

(a) $f_1(x) = |x| - 1$,
$f_2(x) = 1 - x^2$

(b) $f_1(x) = x + 1$,
$f_2(x) = -x + 1$,
$f_3(x) = x - 1$,
$f_4(x) = -x - 1$,

(c) $f_1(x) = \frac{(x-1)^2}{6} - 1$,
$f_2(x) = \frac{x^2}{10} + 2$,

(d) $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$,
$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Délka křivky

Spočtěte délky následujících křivek mezi a a b

(a) $f(x) = x^2,\ a = -1,\ b = 1$,

(b) $f(x) = e^x,\ a = 0,\ b = 5$,

(c) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2},\ a = 1,\ b = e$,

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ a = -1,\ b = 1$.

Objem tělesa

Spočtěte objem těles vzniklých rotací následujících křivek od a do b

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ a = -1,\ b = 1$,

(b) $f(x) = \frac{r}{h}x,\ a = 0,\ b = h$,

(c) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = 0,\ b = \infty$,

(d) $f(x) = r,\ a = 0,\ b = h$.

Povrch tělesa

Spočtěte povrch těles vzniklých rotací následujících křivek od a do b

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ a = -1,\ b = 1$,

(b) $f(x) = \frac{r}{h}x,\ a = 0,\ b = h$,

(c) $f(x) = r,\ a = 0,\ b = h$.

(d) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 0,\ b = 5$.

Užitečné vztahy

Délka křivky
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak délka křivky l grafu mezi a a b je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ \mathrm{d}x.$$

Rotační těleso
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$. Pak objem tělesa vzniklého rotací grafu f v $\mathbb{R}^3$ kolem osy x je

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\ \mathrm{d}x$$

a jeho povrch je

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ \mathrm{d}x.$$