Domácí úkol 11

1. Spočtěte následující integrály

   (a)
$$\int_0^\infty x\arctan(2x^2+1)\ \mathrm{d}x,$$
(2 body)

$$\int_0^\infty x\arctan(2x^2+1)\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} 2x^2+1=y \\ 4x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int_1^\infty \arctan(y)\ \mathrm{d}y \overset{pp.}{=}$$
$$\frac{1}{4}\left[y\arctan(y)\right]_1^\infty - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{y}{y^2+1}\ \mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{c} y^2+1=z \\ 2y\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\left[y\arctan(y)\right]_1^\infty - \frac{1}{8}\int_2^\infty \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z =$$
$$\frac{1}{4}\left[y\arctan(y)\right]_1^\infty - \frac{1}{8}\left[\ln(z)\right]_2^\infty = \frac{1}{4}\lim_{k\to\infty}\left[y\arctan(y) - 2\ln(y^2+1)\right]_1^k,$$

kde nastává problém ve výpočtu horní limity integrálu. Pokud totiž zkusíme přímo "dosadit", tak dostaneme inf − inf. Limitu ale jde snadno spočítat

$$\lim_{k\to\infty} y\arctan(y) - 2\ln(y^2+1) = \lim_{k\to\infty} y\left(\underbrace{\arctan(y)}_{\to\frac{\pi}{2}} - 2\underbrace{\frac{\ln(y^2+1)}{y}}_{\to 0}\right) = \infty.$$

Proto je i hodnota celého integrálu nekonečná.
Tento výsledek byl ale od začátku jasný, protože integrovaná fce je na $\mathbb{R}^+$ kladná a rostoucí. Nesplňuje tedy obdobu nutné podmínky konvergence, kterou jsme viděli u řad.

   (b)
$$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x,$$
(2 body)

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (1-\cos^2(x))\sin(x)\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \cos(x)=y \\ -\sin(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = -\int_1^1 1-y^2\ \mathrm{d}y = 0.$$

Tento výsledek opět nepřekvapí. Je to totiž integrál přes celou periodu, kde $\sin(x)$ bude mít nulový integrál, protože má stejnou plochu pod i nad křivkou. Třetí mocnina tento argument neovlivní. Odtud taky plyne alternativní řešení a to integrál "vycentrovat" substitucí $x = y + \pi$ a užitím $\sin(y+\pi) = -\sin(y)$. Pak dostaneme integrál z liché fce přes symetrický interval, což je nula vždy.

2. Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{1+n^3}.$$
(2 body)

O konvergenci rozhodneme pomocí integrálního kritéria. Spodní odhad dává

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{1+n^3} \geq \int_0^\infty \frac{x^2}{x^3+1}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x^3=y \\ 3x^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{y+1}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{3}[\ln(1+y)]_0^\infty = \infty,$$

tedy musí divergovat i zkoumaná řada.

O konvergenci chceme rozhodnout pomocí integrálního kritéria. Musíme však ověřit, že příslušná fce splňuje jeho předpoklady. Proto upravme

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1-x^2}{x(1+x^2)} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+x^2)} < 0,$$

tedy tahle fce je záporná. Abychom mohli použít integrální kritérium, budeme tedy zkoumat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{n}{1+n^2}.$$

Dál musíme ověřit, že jde o klesající fci. To uděláme pomocí derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right] \overset{\text{Wolfram}}{=} -\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2} < 0,$$

tedy jde opravdu o klesající fci.

Odtud už tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{n}{1+n^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} x^2 = y \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array}\right\} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{4}\ln(1+y) - \frac{1}{2}\ln(x) = \frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(x).$$

Neboli odhad shora

$$\int_2^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(x)\right]_2^{\infty} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(x)\right) - \ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\ln((1+x^2)^{\frac{1}{4}}) - \ln(\sqrt{x})\right) - \ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2),$$

kde je zajímavá jen limita

$$\lim_{k\to\infty}\left(\ln((1+x^2)^{\frac{1}{4}}) - \ln(\sqrt{x})\right) = \lim_{k\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{k\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}}\right) = 0$$