Cvičení 11: Určitý integrál

Snadné integrály

Spočtěte následující integrály

(a) $\int_0^5 x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3}\ \mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^2}\ \mathrm{d}x$,

(c) $\int_4^1 \sqrt{x} e^{1-\sqrt{x^3}}\ \mathrm{d}x$,

(d) $\int_0^\infty \frac{3}{5+2x}\ \mathrm{d}x$,

(e) $\int_5^5 \frac{\arctan(x^{0.75}+3)}{e^{x^3}+x+2}\ \mathrm{d}x$,

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x$,

(g) $\int_0^1 \frac{x^3}{3+x}\ \mathrm{d}x$,

(h) $\int_0^1 x^2(2-3x^2)^2\ \mathrm{d}x$.

Složitější integrály

Spočtšte následující integrály

(a) $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\ \mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^1 x\ln(x)\ \mathrm{d}x$,

(c) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\ \mathrm{d}x$,

(d) $\int_0^\infty x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$.

Integrální kritérium konvergence

Vyšetřete konvergenci následujících řad

(a) $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n}$,

(b) $\sum_{i=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)}$,

(c) $\sum_{i=1}^\infty \frac{n}{(n^2+1)\ln(n^2+1)}$,

(d) $\sum_{i=1}^\infty \frac{e^n}{1+e^{2n}}$.

Užitečné vztahy

Fundamental theorem of calculus:
Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$ a nechť F je primitvní funkce k f. Pak

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Věta o substituci
Nechť $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, kde ϕ má vlastní první derivaci všude na (a,b). Označme

$$J := \phi((a,b)) = \{\phi(t), t \in (a,b)\}.$$

Nechť f je spojitá na J a integrovatelná na vnitřku J. Pak

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Integrace per partes
Nechť $f, g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou spojité na (α,β) a $F, G : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou k nim primitivní funkce. Pak

$$\int_a^b f(x)G(x)\ \mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\ \mathrm{d}x,$$

kde

$$[FG]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Integrální kritérium konvergence:
Nechť $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, klesající fce. Pak

$$\int_1^\infty f(x)\ \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^\infty f(x) \leq \int_1^\infty f(x-1)\ \mathrm{d}x$$

Obrázek 1: Vizualizace integrálního kritéria.