

## Řešení domácího úkolu 10

Spočtěte následující integrály

1.

$$\int x \arctan(x) \, dx$$

(2 body)

2.

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx$$

(2 body)

3.

$$\int \frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$$

(2 body)

a výsledky ověřte zpětnou derivací.

1.

$$\begin{aligned} \int x \arctan(x) \, dx &\stackrel{\text{PP}}{=} \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) = \arctan(x) \frac{x^2+1}{2} - \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

Zk:

$$\left[ \arctan(x) \frac{x^2+1}{2} - \frac{x}{2} \right]' = \frac{x^2+1}{2(1+x^2)} + \arctan(x)x - \frac{1}{2} = \arctan(x)x.$$

2.

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y \\ 2x \, dx = dy \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int y e^{-y} \, dy \stackrel{\text{PP}}{=} \\ &= \frac{1}{2} \left( -y e^{-y} + \int e^{-y} \, dy \right) = -\frac{y+1}{2} e^{-y} = -\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} + c. \end{aligned}$$

Zk:

$$\left[ -\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} \right]' = -e^{-x^2} + 2x \frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} = x^3 e^{-x^2}.$$

3.

$$\int \frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$$

Zde použijeme rozklad na parciální zlomky. Před jeho použitím je ale třeba integrand upravit. V čitateli totiž musí být nižší mocnina  $x$ , jinak bude rozklad složitější

$$\frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 6 + 6 \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}.$$

Budeme se zabývat rozkladem pouze posledního zlomku, tedy

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{x-3}.$$

Nyní bychom mohli pravou stranu formálně opět převést na jeden zlomek a tak zjistit hodnoty neznámých konstant. Nicméně elegantnější řešení je celou rovnici vynásobit jedním ze jmenovatelů, zkusme například  $x$ , tedy

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{(x-2)(x-3)} = \alpha + \frac{\beta x}{x-2} + \frac{\gamma x}{x-3}.$$

Všimneme si, že do této rovnice jde už bez problémů dosadit  $x = 0$ , což je kořen bývalého jmenovatele. Ten navíc zajistí, že všechny ostatní členy na pravé straně jsou nulové. Tento trik jde použít vždy, když nemá jmenovatel výčenné kořeny. Zde tedy dostáváme

$$\alpha = \left[ \frac{5x^2 - 6x + 1}{(x-2)(x-3)} \right]_{x=0} = \frac{1}{6}.$$

Podobně jde ukázat  $\beta = \frac{5 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{9}{2}$  a  $\gamma = \frac{5 \cdot 9 - 6 \cdot 3 + 1}{3 \cdot 1} = \frac{28}{3}$ . Tedy

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{6x} - \frac{9}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{28}{3} \frac{1}{x-3}.$$

To už můžeme snadno zintegrovat po dosazení do původního příkladu

$$\frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 6 + 6 \left( \frac{1}{6x} - \frac{9}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{28}{3} \frac{1}{x-3} \right) = 6 + \frac{1}{x} - \frac{27}{x-2} + \frac{56}{x-3},$$

tedy

$$\int \frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = 6x + \ln(x) - 27 \ln(x-2) + 56 \ln(x-3) + c.$$

Zkouška je zde primitivní.