

Domácí úkol 10

Spočtete následující integrály

1.

$$\int x \arctan(x) \, dx$$

(2 body)

2.

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx$$

(2 body)

3.

$$\int \frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$$

(2 body)

a výsledky ověřte zpětnou derivací.

Bonus: (odevzdejte do prvního zápočtového testu)

V tomto úkolu spočteme Stirlingovu formuli pro aproximaci faktoriálu velkých čísel.

1. Nechť

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx.$$

Vyjádřete $\Gamma(n+1)$ pomocí $\Gamma(n)$. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!$.

2. V minulém úkolu jsme odvodili aproximaci

$$\exp[n \ln(x) - x] = \exp \left[n \ln(n) - n - \frac{(x-n)^2}{2n} \right] \left(1 + \frac{(x-n)^3}{3n^2} + \frac{(x-n)^6}{18n^4} + o((x-n)^9) \right),$$

kde poslední závorka je rozvoj chybového členu.

Vyjádřete integrál z definice $\Gamma(n+1)$ v řeči nové proměnné $z = x - n$.

3. Hranice tohoto integrálu bychom rádi protáhli na celé \mathbb{R} . Chceme tedy ukázat, že doplněk je malý pro velká n . Zanedbejte proto chybové členy až na jedničku a použijte

$$\int_n^{\infty} e^{-t^2} \, dt \leq \int_n^{\infty} \frac{t}{n} e^{-t^2} \, dt$$

4. Nechť z nebe spadne

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx,$$

což ukážeme v posledním bonusovém domácím úkolu.

Zanedbejte všechny chybové členy až na první a určete $\Gamma(n+1)$. Okomentujte proč jde zanedbat vyšší řády z , přestože pod integrálem nabývají neomezených hodnot.

5. Nyní máme tedy

$$\Gamma(n+1) = e^{n \ln(n) - n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2n}\right] \left(1 + \frac{z^3}{3n^2} + \frac{z^6}{18n^4} + o(z^9)\right) dz.$$

Argumentujte, proč zahrnutí dalšího chybového členu nezmění výsledek. Není třeba nic počítat.

6. Spočtete¹ Stirlingovu formuli s prvním chybovým členem².

(3 bonusové body)

¹Resp. pokud jste doteď nedávali vše Wolfram, je dobrá příležitost začít.

²Tímto postupem vyjde jiná konstanta než je správně. Důvod je ten, že jsme použili příliš hrubé zaokrouhlení chyby na začátku. Pokud bychom měli víc času a vůle, je ale postup k určení vyšších řádů rozvoje přímočarý.