

Cvičení 10: Integrál

Základní integrály

Doplňte následující tabulku základních integrálů pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
5	$5x + c$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$5 + 5x$	$5x + \frac{5}{2}x^2 + c$

Snadné integrály

Spočtete následující integrály

- (a) $\int x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} dx$, (d) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$,
 (b) $\int 5e^x + 5e^{5x} + \frac{5}{x} - 5\cos(5x) dx$, (e) $\int \sqrt{1-x} dx$,
 (c) $\int |x| dx$, (f) $\int \sqrt{x^6} dx$.

(a) $\int x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} dx \stackrel{\text{linearita}}{=} \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx + \frac{1}{3} \int x dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + c$.

(b) $\int 5e^x + 5e^{5x} + \frac{5}{x} - 5\cos(5x) dx = 5e^x + e^{5x} + 5\ln(x) - \sin(5x) + c$,

kde jsme použili Větu o substituci na integrály typu $\int e^{5x} dx \stackrel{5x=y}{=} \frac{1}{5} \int e^y dy = \frac{e^y}{5} + c = \frac{e^{5x}}{5} + c$.

(c) Pro $x > 0$ máme $\int |x| dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1$. Pro $x < 0$ máme $\int |x| dx = \int -x dx = -\frac{x^2}{2} + c_2$. Pokud nyní chceme celkový integrál, musíme ho správně “sešít” v bodě $x = 0$. To vyžaduje $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2}{2} + c_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} + c_1$, neboli $c_1 = c_2$. Výsledek tak jde přehledně zapsat jako $\int |x| dx = \text{sign}(x) \frac{x^2}{2} + c$.

(d) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$,

(e) Buď můžeme výsledek uhádnout, nebo použijeme substituci $\int \sqrt{1-x} dx \stackrel{1-x=y}{=} -\int \sqrt{y} dy = -\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$.

(f) $\int \sqrt{x^6} dx = \int |x^3| dx$. Odtud dál je postup zcela stejný jako v (c).

Per partes

Spočtete následující integrály

- (a) $\int x \sin(x) dx$, (b) $\int \ln(x) dx$.

Per partes se většinou používá v upravené podobě

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx,$$

neboli chceme řešit integrál, kde jednu z funkcí umíme zintegrovat a druhé se chceme derivací “zbavit”

(a) V tomto případě se nám nelíbí integrálu x . Proto zvolíme $G(x) = x$, $f(x) = \sin(x)$. To dává

$$\int x \sin(x) dx \stackrel{pp.}{=} x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c.$$

Všimněme si, že bychom to uměli udělat, i kdybychom zvolili f, g obráceně. Tato varianta vede na

$$\int x \sin(x) dx \stackrel{pp.}{=} \frac{x^2}{2} \sin(x) - \int \frac{x^2}{2} \cos(x) dx,$$

což nám ale vůbec nepomůže...

(b) Zde na první pohled ani nemáme dvě funkce, ale trik je v tom vzít $f(x) = 1$ a $G(x) = \ln(x)$. Potom

$$\int \ln(x) dx \stackrel{pp.}{=} x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c.$$

Substituce

Spočítejte následující integrály

(a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx,$

(b) $\int x e^{-x^2} dx.$

(a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{2x} = y \\ 2e^{2x} dx = dy \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2} \frac{1}{1+y} dy = \frac{1}{2} \ln(1+y) = \frac{\ln(1+e^{2x})}{2},$

(b) $\int x e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} -x^2 = y \\ -2x dx = dy \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int e^y dy = -\frac{e^{-x^2}}{2}.$

Parciální zlomky

Spočítejte následující integrály

(a) $\int \frac{1}{1-x^2} dx,$

(b) $\int \frac{2x}{x^2+3x+2} dx.$

Metoda parciálních zlomků používá následující rozklad

$$\frac{1}{(x^{l_1} - a_1)^{k_1} \dots (x^{l_m} - a_m)^{k_m}} = \frac{Ax^{l_1-1} + \dots + 1}{(x^{l_1} - a_1)^{k_1}} + \frac{Bx^{l_1-1} + \dots + 1}{(x - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{Cx^{l_m-1} + \dots + 1}{(x^{l_m} - a_m)^2} + \frac{Dx^{l_m-1} + \dots + 1}{x^{l_m} - a_m},$$

což vypadá dost hrůzostrašně - zkusme to na příkladě

(a) Zde můžeme integrand taky napsat jako $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$, na což aplikujeme náš vzorec. Chceme tedy najít konstanty A, B takové, že

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)}.$$

Protože rovnost musí platit pro členy s x^0 i x^1 , máme odtud soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 0 &= A - B \end{aligned}$$

což řeší $A = B = \frac{1}{2}$. Odtud tedy

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) + c.$$

(b) Obdobným postupem najdeme kořeny a rozklad

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)}.$$

To platí pro $A = -B$ a $1 = 2A + B$, tedy $A = 1$, $B = -1$. Integrál jde tedy přepsat na

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2 + 3x + 2} dx &= \int \frac{2x}{x+1} - \frac{2x}{x+2} dx = 2 \int \frac{x+1-1}{x+1} - \frac{x+2-2}{x+2} dx = \\ &= 2 \int 1 - \frac{1}{x+1} - \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = 2 \int -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} dx = 2(2 \ln(x+2) - \ln(x+1)) + c. \end{aligned}$$

Obtížnější integrály

Spočtěte následující integrály

(a) $\int x^2 \ln(x) dx$,

(e) $\int \tan(x) dx$,

(i) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$,

(b) $\int e^x \sin(x) dx$,

(f) $\int \frac{2x^2}{\cos(x^3)} dx$,

(j) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$,

(c) $\int \arctan(x) dx$,

(g) $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$,

(k) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$.

(d) $\int \cot(x) dx$,

(h) $\int \sin^5(x) \cos(x) dx$,

(a)

$$\int x^2 \ln(x) dx \stackrel{pp.}{=} \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{3^2} + c.$$

(b)

$$\begin{aligned} I =: \int e^x \sin(x) dx &\stackrel{pp.}{=} e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \stackrel{pp.}{=} e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx = \\ &e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - I, \end{aligned}$$

Neboli přeuspořádáním

$$I = \frac{1}{2}(e^x \sin(x) - e^x \cos(x)) + c.$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &\stackrel{pp.}{=} x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y \\ 2x dx = dy \end{array} \right\} = \\ &x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y} dy = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c. \end{aligned}$$

(d)

$$\int \cot(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = y \\ \cos(x) dx = dy \end{array} \right\} = \int \frac{1}{y} dy = \ln(\sin(x)) + c.$$

(e)

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = y \\ -\sin(x) dx = dy \end{array} \right\} = - \int \frac{1}{y} dy = - \ln(\cos(x)) + c.$$

(f)

$$\int \frac{2x^2}{\cos(x^3)} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^3 = y \\ 3x^2 dx = dy \end{array} \right\} = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\cos(y)} dy = \frac{2}{3} \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(y)} dy =$$

$$\frac{2}{3} \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(y)} dy = \left\{ \begin{array}{l} \sin(y) = z \\ \cos(y) dy = dz \end{array} \right\} = \frac{2}{3} \int \frac{1}{1 - z^2} dz,$$

což je již dříve vyřešený příklad na parciální zlomky, tedy

$$\int \frac{2x^2}{\cos(x^3)} dx = \frac{1}{3} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) + c.$$

(g)

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = y \\ \frac{1}{x} dx = dy \end{array} \right\} = \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + c = \ln(\ln(x)) + c.$$

(h)

$$\int \sin^5(x) \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) = y \\ \cos(x) dx = dy \end{array} \right\} = \int y^5 dy = \frac{y^6}{6} + c = \frac{\sin^6(x)}{6} + c.$$

(i)

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = y \\ e^x dx = dy \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(y) + c = \arctan(e^x) + c.$$

(j)

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+4x+5 = y \\ 2x+4 dx = dy \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + c.$$

(k)

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y \\ 2x dx = dy \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \arctan(y) + c = \frac{1}{2} \arctan(x^2) + c.$$