Jak určit π na 10^{13} desetinných míst

Následující text měl být bonusový domácí úkol, ale vzhledem k množství nezajímavé mechanické práce a tomu, že jedinou zajímavostí je Taylor arctan jsem připravil jiný.

Jste trosečník na ostrově, máte pouze papír a tužku. Vaše přežití záleží jedině na tom, jak si Vás oblíbí místní domorodý kmen lidožravých matematikofilů. Pokuste se tedy zachránit si život svou schopností spočítat π na mnoho desetinných míst.

1. Uvědomte si, že
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$
Odtud vyjádřete π.
$$\pi = 4\arctan(1).$$

2. Druhá strana se dá vnímat jako funkce, která je akorát vyčíslená v $x = 1$. Pomocí Taylorova rozvoje v nule tak napište řadu, jejíž součet konverguje k π. Odhadně velikost chyby, pokud sečtete pouze k členů. Konkrétně sečtěte první 3 členy a tak odhadněte π.

   Budeme tedy minulý vztah vnímat jako fci
$$\pi(x) = 4\arctan(x).$$
   Spočteme Taylorův rozvoj v nule pomocí
$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \arctan(x) & \arctan(0) &= 0,\\
\arctan'(x) &= (1+x^2)^{-1} & \arctan'(0) &= 1,\\
\arctan^{(2)}(x) &= -2x(1+x^2)^{-2} & \arctan^{(2)}(0) &= 0,\\
\arctan^{(3)}(x) &= 2(3x^2-1)(1+x^2)^{-3} & \arctan^{(3)}(0) &= -2,\\
\arctan^{(4)}(x) &= -24x(x^2-1)(1+x^2)^{-4} & \arctan^{(4)}(0) &= 0,\\
\arctan^{(5)}(x) &= 24(5x^4-10x^2+1)(1+x^2)^{-5} & \arctan^{(5)}(0) &= 4!,\\
\arctan^{(6)}(x) &= -240x(3x^4-10x^2+3)(1+x^2)^{-6} & \arctan^{(6)}(0) &= 0,\\
&\dots & &\dots
\end{aligned}$$
   což se zdá jako hodně práce na to, že máme jen první člen. Jde ale použít trik, protože první derivace jde vnímat jako součet geometrické řady
$$\pi'(x) = \frac{4}{1+x^2} = 4(1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^7))$$
   Odtud už jde snadno určit všechny vyšší derivace. Je důležité zmínit, že tohle platí jen na $|x| < 1$, jinak totiž geometrická řada diverguje. Obecně je třeba být opatrný, protože derivace a součet nekonečné řady jsou oba limitní procesy, které ne nutně komutují. Uvažujte například
$$0 = \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\frac{k}{l} \neq \lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\frac{k}{l} = \infty.$$
   Zde je ale všechno ok, protože řady jde vždy v mezikroku sečíst a tak se jednoho limitního procesu zbavit. Existují kritéria, která nám dovolují prohazovat limitní procesy v obecných případech, ale těmi se nebudeme tady zabývat.

Tedy

$$T_5^{\pi,0} = 4x - 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^5}{5} + o(x^6).$$

Pokud sečteme pouze prvních k členů, bude mít chyba tvar

$$R_k^{\pi,0}(x) = \frac{\pi^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

což v našem případě je

$$R_5^{\pi,0}(x) = \frac{1}{(k+1)!}\left[-\frac{960c(3-10c^2+3c^4)}{(1+c^2)^6}\right]x^{k+1}.$$

Pokud bychom použili např. Wolfram, zjistili bychom, že daná fce má maximální absolutní hodnotu (v tomhle případě jde o minimum) v $c \approx 0.23$ rovnou ≈ -402, tedy maximální chyba bude $\approx \frac{402}{6!} \approx 0.56$. První tři členy nám konkrétně dají odhad[1]

$$\pi(1) = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} = 3.4\overline{6}.$$

Náš odhad je tedy v rámci chyby správně, ale není nic extra.

3. Tahle řada ale konverguje relativně pomalu, protože členy klesají jako $\sim \frac{1}{n}$. Všimneme si ale, že pokud $|x| < 1$, budou členy tlumeny exponenciálně. Rádi bychom tedy vyjádřili pomocí nějakého členu blíž k 1. To samozřejmě jde udělat například pomocí $\frac{\pi}{6}$. Ukažte, s jakým exponenciálním faktorem klesá tato řada. Sečtěte první 3 členy a odhadněte tak π.

   Platí
   $$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

   Odtud tedy použitím výše spočteného Taylorova polynomu pro arctan máme

   $$\pi \approx 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3^2\sqrt{3}} + \frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}\right) \overset{\text{Wolfram}}{\approx} 3.1562,$$

   což je daleko lepší odhad.

4. Tohle nám pořád nestačí, ale blíž se k $x = 0$ pomocí středoškolských znalostí hodnot goniometrických nedostaneme. Poučení je ale jasné, Taylorův polynom má menší chybu, pokud je zkoumaná hodnota blíž bodu rozvoje. Protože $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}$, mohlo by jít dosáhnout menší chyby tak, že uděláme rozvoj kolem $\frac{1}{2}$ a vyčíslíte ho v $x = 1$. To se nám však nechce dělat, protože by se nám v polynomu vyskytly další členy, se kterými se nebude počítat moc dobře. Zkuste vysvětlit, proč se objeví tyto nové členy při rozvoji kolem $\frac{1}{2}$ a ne kolem 0.

   Protože arctah je lichá fce, budou všechny její sudé derivace v nule kladné. To dává smysl, protože Taylor se vlastně snaží aproximovat fci polynomem a pro sudé mocniny je polynom sudý, tedy nejmeněí chyba bude, pokud v rozvoji ten řád nebude.

   Pro představu si zkuste "přiložit parabolu na lichou fci". Jakékoliv přiblížení na jedné straně od bodu rozvoje Vás vzdálí na druhé straně.

5. Menší argument jde získat tak, že použijeme součtový vzorec pro arctan, který jde odvodit pomocí součtových vzorců pro goniometrické.

   $$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

[1] Bod c z odhadu chyby může ležet kdekoliv na intervalu mezi bodem, kde rozvoj děláme a vyhodnocujeme. V našem případě nejhorší možnost nastane v $x = 1$, protože tam má šestá derivace největší hodnotu

Použijte tento vzorec pro $x = \frac{1}{2}$ a $y = \frac{1}{3}$ a dostanete Eulerův vzorec pro výpočet π. Pomocí prvních třech členů odhadněte velikost π.

Pro zadaná x, y dostáváme

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

což pomocí dvou Taylorových rozvojů dává

$$\pi \approx 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5}\right) + 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5}\right) \overset{\text{Wolfram}}{\approx} 3.1456.$$

6. Pouze pro představu stojí za zmíňku, že tento vzorec jde aplikovat opakovaně a tím dostávat menší argument a tedy rychlejší konvergenci. Například jde získat

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Pomocí tohoto vzorce určil v r. 1706 John Machin π na 100 desetinných míst.

V roce 2002 použil prof. Yasumasa Kanada verze

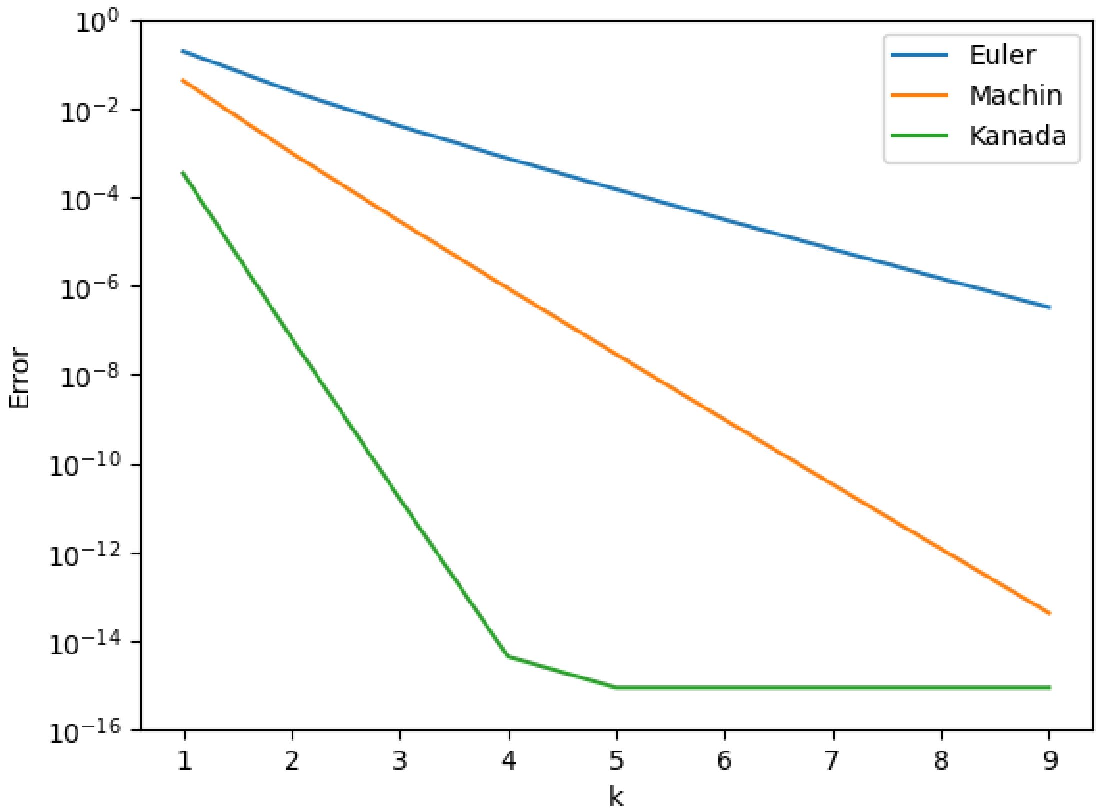
$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\left(\frac{1}{49}\right) + 32\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 12\arctan\left(\frac{1}{110443}\right)$$

a

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 7\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 12\arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 24\arctan\left(\frac{1}{12943}\right)$$

aby určil π na $\approx 10^{13}$ desetinných míst.

Pro ilustraci rychlosti konvergence se můžete podívat na Obrázek 1. Chyba skutečně klesá exponenciálně s množstvím sečtených členů a je vidět, že poslední formulka klesá nejrychleji a proto je jistě nejlepší. Průměr posledních dvou má dokonce tak malou chybu, že po sečtení prvních pěti členů přeteče double precision.



Obrázek 1: Chyba vypočteného π pomocí vzorců výše po sečtení k členů příslušných rozvojů.