

Domácí úkol 9

Počítač použijte maximálně na derivování.

1. Určete hodnotu

$$(26)^{\frac{1}{3}}$$

na tři desetinná místa¹.

(1 bod)

2. Spočtete následující limity

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \sin(x) - \cos(x) + \ln(1 - 2x)}{\cos(5x) - 1},$$

(1 bod)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right),$$

(2 body)

3. Cena cenného papíru závisí na čase t podle

$$p = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{t+1}\right) - \arctan(t),$$

kde $t = 0$ je “přítomnost”. Pomocí Taylorovi aproximace do prvního řádu odhadněte cenu zítra (tj. $t = 1$) a podle toho řekněte, jestli se vyplatí dnes papír koupit a zítra prodat.

V téhle úloze si představujeme, že z nějakého důvodu neumíme/nechceme přímo vyčíslit $p(1)$. Vaše řešení by tak nemělo $p(1)$ používat jinak než pro případnou kontrolu.

(2 body)

Bonus: (deadline 2. 5. 2022)

V tomto úkolu budeme zkoumat aproximaci třídy exponenciálních fcí. Tyto úvahy vedou na tkz. Laplacovu metodu výpočtu určitého integrálu, kterou využijeme v dalším bonusovém domácím úkolu.

- Mějme $f(x)$ zadanou na otevřeném intervalu (a, b) , která má jedno globální maximum v $x_0 \in (a, b)$. Napište Taylorův rozvoj do druhého řádu takové fce kolem x_0 a řekněte co nejvíc o jeho členech.
- Uvažujte $g(x) = e^{f(x)}$. Určete odhad g pomocí Taylorova polynomu pro f do druhého řádu, neboli chyba je třetího řádu.
- Uvažujte speciálně $f(x) = n \ln(x) - x$, kde $n \in \mathbb{N}$ je parametr nezávislý na x . Vyšetřete průběh této fce na $(0, \infty)$.
- Aplikujte předchozí postup na $e^{n \ln(x) - x}$, $n \in \mathbb{N}$ na $(0, \infty)$.
- Najděte bod vyčíslení zbytku Taylorova polynomu, který maximalizuje chybu.
- Najděte první tři netriviální členy Taylorova rozvoje exponenciály chybového členu okolo $x = n$.
- Napište celý rozvoj v nové proměnné z lineární v x , která pouze posune počátek do n .

(2 bonusové body)

¹Neboli určete velikost chyby a ujistěte se, že je menší než 10^{-3} .