Řešení cvičení 9: Taylorův rozvoj

Přímé rozvoje

Vyjádřete Taylorův polynom následujících funkcí v bodě x_0 pro $a \in \mathbb{R}$ do druhého řádu

(a) $e^{x^2}, \quad x_0 = 0,$

(b) $\ln(1+x^2), \quad x_0 = 0,$

(c) $e^x \sin(x), \quad x_0 = 0,$

(d) $e^{ax}, \quad x_0 = 0,$

(e) $\sqrt{1+ax}, \quad x_0 = 0,$

(f) $\sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$

Postupujeme prostě tak, že funkci neustále derivujeme a vyhodnocujeme tuto derivaci v příslušném bodě.

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(x_0) &= 0, \\ f''(x) &= 2e^{x^2} & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Všimněme si, že protože je funkce sudá, musí všechny liché členy rozvoje být nulové a to nám i vyšlo. Tento rozvoj je tedy platný i do 3tího řádu. Dále si jde všimnout, že jsme dostali prostě rozvoj e^y pro $y = x^2$.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x^2) & & \\ f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} & f(x_0) &= 0, \\ & & f'(x_0) &= 0, \\ f''(x) &= \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = x^2 + o(x^2).$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin(x) & f(x_0) &= 0, \\ f'(x) &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) & f'(x_0) &= 1, \\ f''(x) &= 2e^x \cos(x) & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = x + x^2 + o(x^2).$$

(d)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= ae^{ax} & f'(x_0) &= a, \\ f''(x) &= a^2e^{ax} & f''(x_0) &= a^2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2!} + o(x^2).$$

Opět nám vyšel vlastně rozvoj e^x, do kterého jsme akorát "dosadili" ax.

(e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+ax} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{a}{2\sqrt{1+ax}} & f'(x_0) &= \frac{a}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{a^2}{4}(1+ax)^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= -\frac{a^2}{4}, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + \frac{ax}{2} - \frac{a^2x^2}{8} + o(x^2).$$

(f)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(x_0) &= \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{3!}x^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= -\frac{1}{3!}, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{2\cdot 3!} + o(x^2).$$

Přibližná hodnota

Spočtěte přibližně a určete chybu odhadu

(a) $\sqrt[5]{250}$, (b) e^2, (c) $\ln(1.2)$, (d) $\sin(\pi - 0.2)$.

(a) Na začátku výpočtu si situaci zlehčíme tak, že vytkneme největší číslo typu a^5 menší než 250. To dává $3^5 = 243$, tedy $\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243+7} = \sqrt[5]{243}\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}} = 3\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}}$. Nyní můžeme použít Taylorův rozvoj pro $(1+x)^{\frac{1}{5}}$ kolem $x = 0$, protože $\frac{7}{243} \ll 1$. Tento rozvoj je (buď spočteme rukou, nebo použijeme wolfram)

$$(1+x)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + o(x^2).$$

Pokud použijeme jen první řád, dostáváme hodnotu $\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}} \approx 1 + \frac{7}{1215} \approx 1.00576$. Chybu určíme pomocí následujícího řádu. My ale neznáme hodnotu c a proto chybu odhadneme a zvolíme c tak, aby byla co největší. Druhá derivace naší funkce je

$$\left((1+x)^{\frac{1}{5}}\right)'' = -\frac{4}{25(1+x)^{\frac{9}{5}}},$$

což je v abosultní hodnotě[1] největší pro $x = 0$, tedy volíme i $c = 0$. Tam je chyba

$$R_2 = \frac{4}{25}\frac{1}{2!}\left(0 - \frac{7}{243}\right)^2 \approx 0.00007.$$

Dostáváme tedy $\sqrt[5]{250} = 3(1.00576 \pm 0.00007) = 3.0173 \pm 0.0002$. Správná hodnota[2] je ≈ 3.01709, tedy v rámci chyby.

[1] Zbytek jsme definovali jako $R_n = f - T_n$. Znaménko nám tedy říká, jestli je odhad větší či menší, ale zde nás zajímá jeho velikost.

[2] Neboli to, co spočítal počítač obdobným postupem, ale do vyššího řádu.

(b) Známe rozvoj exponenciály a tedy přímočaře do prvního řádu dostáváme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

což pro $x = 2$ dává do prvního řádu $e^2 = 3$. Chyba takového odhadu je ale závislá na e^x, protože exponenciála je sama svojí derivací. Jak je vidět, je třeba chybu odhadnout jinak a to pomocí součtu zbytku řady jako to bylo v prvním bonusovém DÚ. Poznamenejme ale, že $e^2 \approx 7.389$, tedy chyba našeho odhadu je dost velká. Členy řady totiž pro $x = 2$ klesají poměrně pomalu.

(c) Použijeme řadu $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Do prvního řádu opět máme $\ln(1.2) = 0.2$. Chybu určíme z následjícího řádu, kde víme

$$(\ln(1 + x))'' = -\frac{1}{(1 + x)^2},$$

tedy největší příspěvek dostaneme pro $c = 0$, což dává chybu

$$R_2 = \frac{1}{2!}\,(0.2)^2 \approx 0.02.$$

Přesná hodnota je $\ln(1.2) \approx 0.182$, tedy v rámci chyby máme výsledek dobře.

(d) Zde lze s výhodou využít buď sčítací vzorec, nebo přímo geometrickou intuiici, která říká $\sin(\pi - 0.2) = \sin(0.2)$. Nyní použijeme Taylora pro sinus kolem nuly a do první řádu máme $\sin(0.2) = 0.2$. Chybu určíme pomocí

$$(\sin(x))'' = -\sin(x),$$

což maximalizuje na $[0, 0.2]$ právě $c = 0.2$

$$R_2 = \sin(0.2)\frac{1}{2!}\,(0.2)^2 \approx 0.004.$$

Tady jsem podváděl, protože opět nám zbytek závisí na samotném $\sin(x)$, který se snažíme určit. Je ale vidět, že $R_2 < \sin(0.2)$ a tedy 0.2 se zdá jako rozumný odhad, protože chyba jde odhadnout ze samotného odhadu $\sin(0.2)$. Skutečná hodnota je $\sin(0.2) \approx 0.1987$.

Vnoření řad

Spočtěte pouze pomocí skládání/násobení nekonečných řad základních funkcí z užitečných vztahů rozvoje funkcí v bodě $x_0 = 0$ do třetího řádu

(a) $e^x \sin(x)$, (b) $\sin(\sin(x))$.

Známe rozvoje příslušných funkcí a chceme celkový rozvoj. Řady do sebe tedy "dosadíme" a snažíme se postupně najív všechny členy řádu x^n a postupovat do kýženého n. Zde chceme $n = 3$ a tedy rovnou budeme vše vyššího řádu strkat do $o(x^3)$

(a)

$$e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = x + x^2 + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^3).$$

(b)

$$\sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \underbrace{- \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3}{3!}}_{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)} + \underbrace{\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^5}{5!}}_{o(x^4)} =$$

$$x + x^3\left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^4).$$

Limity

Spočtěte následující limity pro $a \in \mathbb{R}^+$

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin(x)-x(x+1)}{x^3}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} x^4\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2e^x-e^{2x}-1}$,

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}+o(x^5)}{x^4}=$$

$$\underbrace{\frac{1}{4!}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^4}}_{\text{Tohle se většinou vynechává.}}=\frac{1}{4!}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(a)x}+e^{-\ln(a)x}-2}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\ln(a)x+\frac{(\ln(a)x)^2}{2!}+o(x^2)\right)+\left(1-\ln(a)x+\frac{(\ln(a)x)^2}{2!}+o(x^2)\right)-2}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(a)x)^2+o(x^2)}{x^2}=(\ln(a))^2.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin(x)-x(x+1)}{x^3}\overset{3(a)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\right)+o(x^3)-x(x+1)}{x^3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\right)=\frac{1}{3}.$$

(d) Taylora v nekonečnu dělat neumíme, ale stejně nám může pomoct trik - uděláme substituci $x=\frac{1}{y}$ a použijeme známé rozvoje

$$\lim_{x\to\infty} x^4\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)=\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos(y)-e^{-\frac{y^2}{2}}}{y^4}=$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2\right)+o(y^4)}{y^4}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{y^4}{4!}-\frac{y^4}{8}+o(y^4)}{y^4}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{12}.$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2e^x-e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}\right)-1+o(x^2)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-\frac{(2x)^2}{2!}+o(x^2)}=-1.$$

(f) Jde o limitu posloupnosti, která je nám již dobře známá. Zde jí vyřešíme na dvou řádcích.

Nejprve řekněme, že podle Heineho věty je možné toto vnímat jako limitu funkce a pokud ta existuje, je nutně rovná limitě posloupnosti.

Chtěli bychom použít Taylorův rozvoj, ale ten nejde dělat v nekonečnu. Použijeme tedy už zmíněný převod proměnných $n = \frac{1}{x}$. To nám umožní psát

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n} - 2\sqrt{n^2+n} + n) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}(\sqrt{1+2x} - 2\sqrt{1+x} + 1) \overset{\text{Taylor}}{=}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left[1 + \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} - 2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + 1 + o(x^2)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2x^2}{8} + o(x^2)\right) = -\frac{1}{4}.$$

Motivace z fyziky

Kinetická energie je v teorii relativity daná jako

$$K = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} - m_0 c^2,$$

kde $m_0 = \text{const.}$ je hmotnost částice, v její rychlost a $c = \text{const.}$ rychlost světla. Pro pomalé částice, tedy $v \ll c$ by se měla tato veličina redukovat na její klasickou podobu $K = \frac{1}{2}mv^2$. Přesvědčte se, že to tak opravdu je a určete první relativistickou opravu k této limitě.

Nejprve musíme vzorec upravit, protože rozvoj děláme v malém ale bezrozměrném parametru $\frac{v}{c} \ll 1$, který označíme x. Proto

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2,$$

Pokud se zbavíme otravných konstant a soustředíme se jen na důležitou část, pak rozvíjíme

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

To zpětně dosadíme do vzorce pro kinetickou energii

$$K = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + o\left(\left(\frac{v}{c}\right)^5\right)\right] - m_0 c^2 =$$
$$\underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{Klasická kinetická energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}}_{\text{První relativistická oprava}} + o\left(\left(\frac{v}{c}\right)^5\right).$$

Je tedy vidět, že pro pomalu letící částice bude hlavním příspěvkem část, kterou pozorovali lidé už předtím. To samozřejmě dává dobrý smysl, protože pokud má teorie nějakou část poznání rozšiřovat, musí v limitách kdy dobře fungovala předchozí teorie přecházet právě na ni.