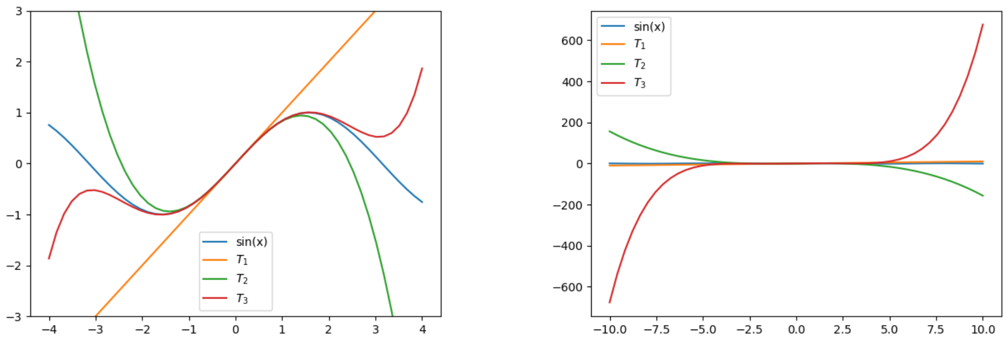
Cvičení 9: Taylorův rozvoj



Přímé rozvoje

Vyjádřete Taylorův polynom následujících funkcí v bodě x_0 pro $a \in \mathbb{R}$ do druhého řádu

(a) $e^{x^2}, \quad x_0 = 0,$

(b) $\ln(1+x^2), \quad x_0 = 0,$

(c) $e^x \sin(x), \quad x_0 = 0,$

(d) $e^{ax}, \quad x_0 = 0,$

(e) $\sqrt{1+ax}, \quad x_0 = 0,$

(f) $\sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$

Přibližná hodnota

Spočtěte přibližně a určete chybu odhadu

(a) $\sqrt[5]{250}$,

(b) e^2,

(c) $\ln(1.2)$,

(d) $\sin(\pi - 0.2)$.

Vnoření řad

Spočtěte pouze pomocí skládání/násobení nekonečných řad základních funkcí z užitečných vztahů rozvoje funkcí v bodě $x_0 = 0$ do třetího řádu

(a) $e^x \sin(x)$,

(b) $\sin(\sin(x))$.

Limity

Spočtěte následující limity pro $a \in \mathbb{R}^+$

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin(x)-x(x+1)}{x^3}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} x^4 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2e^x-e^{2x}-1}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n} - 2\sqrt{n^2+n} + n)$.

Motivace z fyziky

Kinetická energie je v teorii relativity daná jako

$$K = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} - m_0 c^2,$$

kde $m_0 = \text{const.}$ je hmotnost částice, v její rychlost a $c = \text{const.}$ rychlost světla. Pro pomalé částice, tedy $v \ll c$ by se měla tato veličina redukovat na její klasickou podobu $K = \frac{1}{2}mv^2$. Přesvědčte se, že to tak opravdu je a určete první relativistickou opravu k této limitě.

Užitečné vztahy

Taylorův polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkce f je

$$T_n^{f,x_0}(x) = T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i =$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Zbytek (chyba) Taylorovy aproximace je dána jako

$$R_n^{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde c leží mezi x a x_0.

Některé základní Taylorovy polynomy v bodě $x_0 = 0$ jsou

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$