Řešení cvičení 7: Derivace

Snadné derivace

Spočtěte následující derivace

(a) $\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\sin(x^2)}{\mathrm{d}x}$,

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$,

(d) $\frac{\mathrm{d}\log_x(2)}{\mathrm{d}x}$,

(e) $\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x}$.

(a) $\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\sin(x^2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = \cos(x^2)2x$,

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+\frac{2}{x-1}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[-2(x-1)^{-2}\right]$,

(d) $\frac{\mathrm{d}\log_x(2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \ln(2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln^{-1}(x) = \ln(2)(-1)\ln^{-2}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = -\ln(2)\ln^{-2}(x)\frac{1}{x}$,

(e) $\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 1 & x>0, \\ -1 & x<0, \\ \text{neexistuje} & x=0. \end{cases}$

Obtížnější derivace

Vzorce

Spočtěte následující derivace

(a) $\frac{\mathrm{d}5^x}{\mathrm{d}x}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{sgn}(x)}{\mathrm{d}x}$,

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(\ln(x))^x}{x^{\ln(x)}}$,

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{5!(5^5+x^5)^5}$,

(e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{5^{x^5}}$.

No fuj, samotnému se mi do toho nechce. Tohle je btw práce pro počítač. Kdybyste někdy vážně chtěli něco derivovat, nedělejte to rukou, uděláte tam chybu (čímž se rovnou omlouvám za svoje...)

(a) $\frac{\mathrm{d}5^x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^{x\ln(5)}}{\mathrm{d}x} = e^{x\ln(5)}\frac{\mathrm{d}x\ln(5)}{\mathrm{d}x} = e^{x\ln(5)}\ln(5) = \ln(5)5^x$.

(b) $\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{sgn}(x)}{\mathrm{d}x}\begin{cases} 0 & x\neq 0, \\ \text{neexistuje} & x=0. \end{cases}$
V nule má funkce skok a tak vůbec není jasné, jakou by tam měla mít derivaci. Tady nemáme problém jako v 1(e), že derivace z obou stran se nerovnají. V nějakém smyslu by se dalo říct, že derivace tam je "nekonečná", ale tak jednoduché to není. Až Dirac dokázal v 20tém století zformalizovat tkz. distribuce, které se snaží dát odpověď na to, jaká je tahle derivace. Nicméně to je pro nás hodně daleko...

(c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(\ln(x))^x}{x^{\ln(x)}} = \frac{1}{x^{2\ln(x)}}\left(\frac{\mathrm{d}(\ln(x))^x}{\mathrm{d}x}x^{\ln(x)} - (\ln(x))^x\frac{\mathrm{d}x^{\ln(x)}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{x^{2\ln(x)}}\left(x^{\ln(x)}\frac{\mathrm{d}e^{x\ln(x)}}{\mathrm{d}x} - (\ln(x))^x\frac{\mathrm{d}e^{\ln^2(x)}}{\mathrm{d}x}\right) =$$

$$\frac{1}{x^{2\ln(x)}}\left(x^{\ln(x)}e^{x\ln(x)}\frac{\mathrm{d}x\ln(x)}{\mathrm{d}x} - (\ln(x))^x e^{\ln^2(x)}\frac{\mathrm{d}\ln^2(x)}{\mathrm{d}x}\right) =$$

$$\frac{1}{x^{2\ln(x)}}\left(x^{\ln(x)}e^{x\ln(x)}\left(\ln(x)+\frac{x}{x}\right) - (\ln(x))^x e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{x^{2\ln(x)}}\left(x^{\ln(x)}e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1) - (\ln(x))^x e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\frac{1}{x}\right).$$

(d)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{5!(5^5+x^5)^5} = \frac{1}{(5!(5^5+x^5)^5)^2}\left[\frac{\mathrm{d}\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{\mathrm{d}x}5!(5^5+x^5)^5 - \sqrt[5]{5x^5+5+5^x}\frac{\mathrm{d}5!(5^5+x^5)^5}{\mathrm{d}x}\right] =$$
$$\frac{1}{5!(5^5+x^5)^5}\frac{\mathrm{d}\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{\mathrm{d}x} - \frac{5!\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{(5!(5^5+x^5)^5)^2}\frac{\mathrm{d}(5^5+x^5)^5}{\mathrm{d}x} =$$
$$\frac{(5x^5+5+5^x)^{-\frac{4}{5}}}{5!(5^5+x^5)^5}\frac{\mathrm{d}(5x^5+5+5^x)}{\mathrm{d}x} - \frac{5!\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{(5!(5^5+x^5)^5)^2}5(5^5+x^5)^4\frac{\mathrm{d}(5^5+x^5)}{\mathrm{d}x} =$$
$$\frac{(5x^5+5+5^x)^{-\frac{4}{5}}}{5!(5^5+x^5)^5}(5^2x^4+\ln(5)5^x) - \frac{5!\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{(5!(5^5+x^5)^5)^2}5(5^5+x^5)^4 5x^4.$$

(e)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{5^{x^5}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{e^{x^5\ln(5)}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{e^{x^5\ln(5)}\ln(x)} = e^{e^{x^5\ln(5)}\ln(x)}\frac{\mathrm{d}e^{x^5\ln(5)}\ln(x)}{\mathrm{d}x} =$$
$$x^{5^{x^5}}\left(\ln(x)\frac{\mathrm{d}e^{x^5\ln(5)}}{\mathrm{d}x} + e^{x^5\ln(5)}\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x}\right) = x^{5^{x^5}}\left(\ln(x)e^{x^5\ln(5)}\frac{\mathrm{d}x^5\ln(5)}{\mathrm{d}x} + e^{x^5\ln(5)}\frac{1}{x}\right) =$$
$$x^{5^{x^5}}5^{x^5}\left(\ln(x)\ln(5)5x^4 + \frac{1}{x}\right).$$

Poučení zní - derivace i relativně neškodně vypadajícího výrazu může vybouchnout. Hledat zjednodušení může pak být nadlidský úkol - přenechejme ho stroji jak to je jen možné!

Inverzní funkce

Pomocí $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 1$ spočtěte derivace fcí inverzních k

(a) e^x, (b) $\sin(x)$, (c) $\tan(x)$, (d) x^2.

(a) $1 = \frac{\mathrm{d}\ln(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\ln(y)}{\mathrm{d}y}e^x \overset{e^x=y}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}\ln(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}$,

(b) $1 = \frac{\mathrm{d}\arcsin(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\arcsin(y)}{\mathrm{d}y}\cos(x) = \frac{\mathrm{d}\arcsin(y)}{\mathrm{d}y}\sqrt{1-\sin^2(x)} \overset{\sin(x)=y}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}\arcsin(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(c) $1 = \frac{\mathrm{d}\arctan(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\arctan(y)}{\mathrm{d}y}\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\mathrm{d}\arctan(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \overset{\tan(x)=y}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}\arctan(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+x^2}$,

(d) $1 = \frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y}2x \overset{x^2=y}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

l'Hospitalovo pravidlo

Základní limity

Nejprve zkuste odvodit nám již známé limity, které jsme zatím ne všechny uměli dobře zdůvodnit

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}$, (c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, (e) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$, (d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$, (f) $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)}{x}$.

Poznamenejme, že všude jsou splněny předpoklady věty.

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{2x} \overset{\text{l'H}}{=} -\frac{1}{2}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$,

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{\arctan(x)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 0$.

Vhodné na l'Hospitala

Spočtěte následující limity pro $\alpha > 0$

(a) $\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha+x)^x-\alpha^x}{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$,

(g) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

(h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$,

(i) $\lim_{x\to 0} (2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Opět, kde l'Hospitala použijeme, tam ho můžeme použít, ale je třeba to ověřit

(a) $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$,

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha+x)^x-\alpha^x}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{((\alpha+x)^x)'-\ln(\alpha)\alpha^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln(\alpha+x)})'-\ln(\alpha)\alpha^x}{2x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(\alpha+x)}(x\ln(\alpha+x))'-\ln(\alpha)\alpha^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha+x)^x(\ln(\alpha+x)+\frac{x}{\alpha+x})-\ln(\alpha)\alpha^x}{2x} \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha+x)^x(\ln(\alpha+x)+\frac{x}{\alpha+x})^2+(\alpha+x)^x(\frac{1}{\alpha+x}+(1-\frac{\alpha}{\alpha+x})')-\ln^2(\alpha)\alpha^x}{2} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha+x)^x(\ln(\alpha+x)+\frac{x}{\alpha+x})^2+(\alpha+x)^x(\frac{1}{\alpha+x}+\frac{\alpha}{(\alpha+x)^2})-\ln^2(\alpha)\alpha^x}{2} =$$
$$\frac{(\ln(\alpha))^2+(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha^2})-\ln^2(\alpha)}{2} = \frac{(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha^2})}{2} = \frac{1}{\alpha},$$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{2x} = 0$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)e^x+1}{3x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{6x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)e^x}{6} = \frac{1}{6}$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2)+x^2 2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2)+x^2 2x\cos(x^2)}$,

(g) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$,

(h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\tan(x))}{\frac{1}{\tan(2x)}}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\frac{1}{\tan(x)\cos^2(x)}}{-\frac{2}{\tan^2(2x)\cos^2(2x)}}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{\tan^2(2x)}{2\tan(x)}} = 1$,

(i) $\lim_{x\to 0} (2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(2e^x-1)}{\frac{x}{x^2+1}}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{2e^x}{2e^x-1}}{\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2e^x(x^2+1)^2}{(2e^x-1)(1-x^2)}} = e^2$.

Nevhodné na l'Hospitala

Konečně se podívejme na limity, kde nám l'Hospital nepomůže. Zkuste si bezhlavě aplikovat l'Hospitala a pak říct, proč to nefunguje

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)+\cos(x)}$,

(b) $\lim_{x\to 5} \frac{5x+5}{5x+5!}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(a) Zde nejsou splněny předpoklady věty. Vidíme ale, že čitatel jde do nekonečna a jmenovatel periodicky mění znaménko a tedy $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)+\cos(x)}$ neexistuje.

(b) Tady není problém, stačí dosadit $\lim_{x\to 5} \frac{5x+5}{5x+5!} = \frac{30}{25+5!}$. Pokud bychom ale aplikovali l'Hospitala, tak $\lim_{x\to 5} \frac{5x+5}{5x+5!} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 5} \frac{5}{5} = 1$. Takže předpoklady jsou důležité.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+3}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}$, což je opět výraz stejného typu a z cyklu se nikdy nedostaneme. l'Hospital je říká, že obě limity se rovnají, ne že tudy vede cesta k výpočtu. Skutečně pokud zlomek zjednodušíme, tak $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = 2$.

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, což je opět cyklus. Zase nám ale pomůže prostá úprava $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$.