Domácí úkol 5

1. Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řad pro $x \in \mathbb{R}$

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\cos(n)}{3+\cos(n)} \right)^{2n-\ln(n)}.$$

   (3 body)

2. Rozhodněte o konvergenci řady
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{n}.$$
   Můžete se pro zajímavost zkusit podívat na absolutní konvergenci, ale je dost těžká a není součástí příkladu.

   (2 body)

Bonus: (deadline 28. 3. 2022)
Naším cílem bude najít hodnotu Eulerova čísla e z prvních principů.

1. Uvažujme derivaci funkce a^x, kde $a > 0$
   $$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}.$$
   To je opět nějaká funkce x závislá na a. Nás ale bude zajímat hodnota a pro kterou je derivace právě a^x. Ukažte na jakou limitní podmínku vede tento požadavek.

2. Uvědomte si, že tato podmínka by byla splněna pokud $a(h) = \sqrt[h]{1 + h + o(h)}$.

3. Tento požadavek nás zajímá v příslušné limitě, ale praktičtější je s ním pracovat v limitě do nekonečna. Ukažte, že
   $$e \overset{\text{def.}}{=} a(h \to 0) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4. Odtud pomocí binomické věty ukažte, že (Pokud máte v jednom místě výpočtu špatný pocit, že posíláte do nekonečna jak počet členů, tak členy samotné, tak to je dobře! Zkuste okomentovat, proč by tady mělo být všechno ok.)
   $$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$
   a přesvědčte se, že výsledná řada je absolutně konvergentní.

5. Nyní už nezbývá než sečíst řadu, což ale neumíme udělat přesně. Protože členy ale rychle klesají, můžeme sečíst prvních pár členů a odhadnout velikost zbytku. K odhadu můžete vhodně použít např. řadu $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$. Určete hodnotu eulerova čísla s chybou[1] maximálně 0.25.

(3 bonusové body)

[1] Samozřejmě nemůžete použít předpočítanou hodnotu e z internetu k ověření velikosti této chyby.