Řešení cvičení 5: Řady

Základní řady

Zamyslete se nad následujícími řadami

- Geometrická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$,
- Zobecněná harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

- Geometrická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Platí pro ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{diverguje } (\infty) & q > 1 \\ \text{diverguje (osciluje)} & q < -1 \end{cases}$$

- Zobecněná harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Jak se ukázalo nejspíš už na přednášce pomocí Cauchyovy podmínky

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(s-1)}},$$

což konverguje pouze pro $s > 1$ viz výše. Naopak diverguje jinak. Z toho vidíme základní požadavky na chování členů řad a jak rychle musí klesat, aby byl součet konečný.

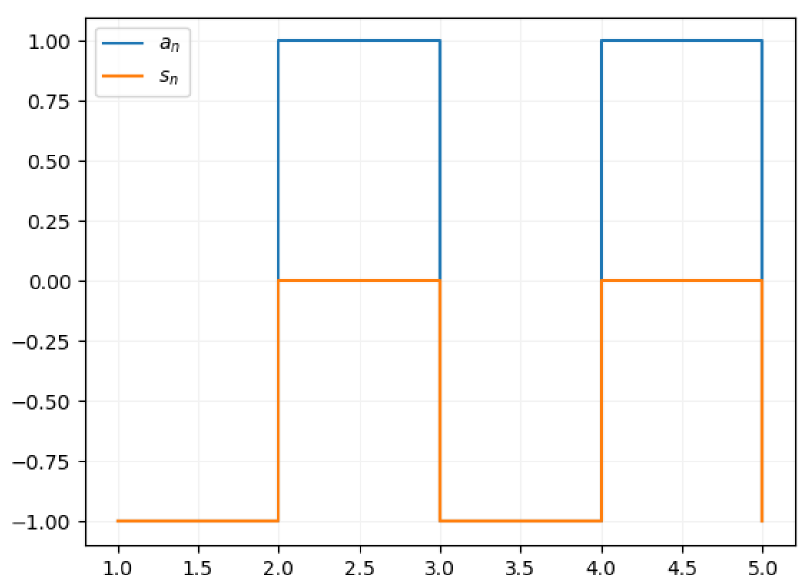
Grafické znázornění

Uvažujte jak jde graficky znázornit řady

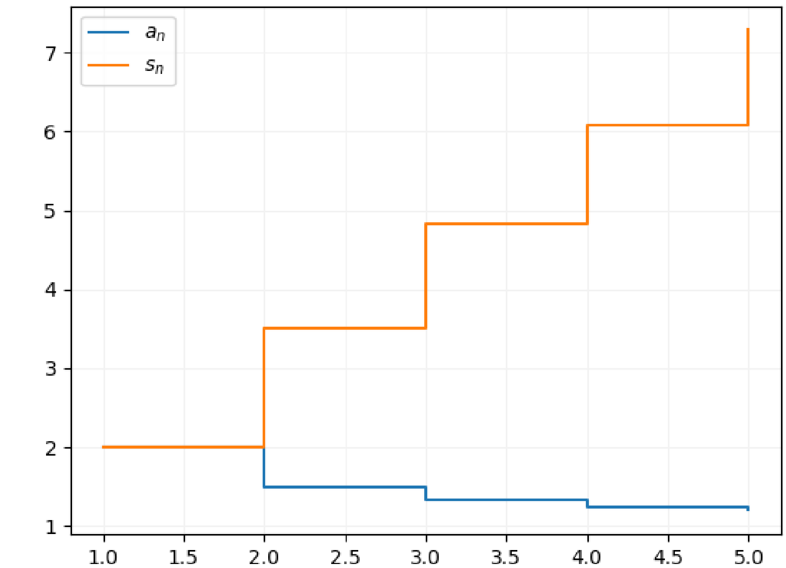
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

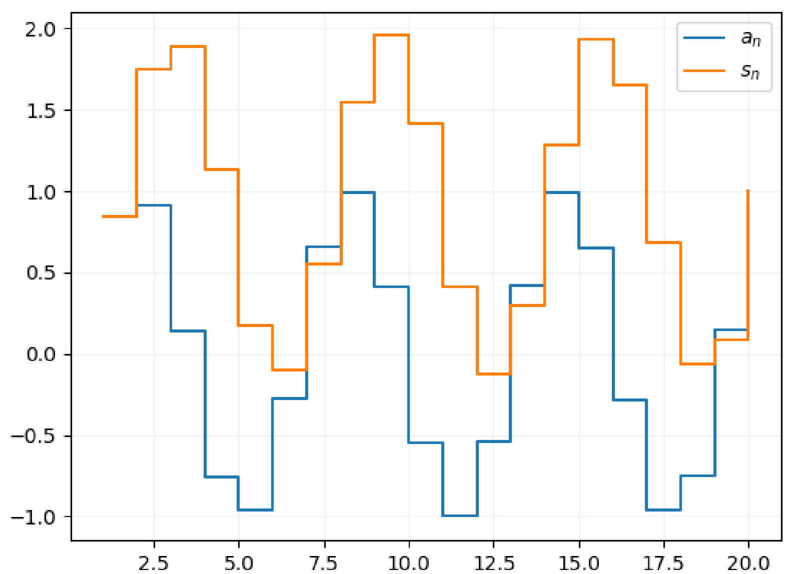
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$.



(a)


a_n
s_n
7
6
5
4
3
2
1
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0

(b)


a_n
s_n
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

(c)

Konvergence

Vyšetřete konvergenci následujících řad

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{n+\ln(n)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\sqrt{n})^n}{(2n^2+n)^{\frac{n}{2}}}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{8^n-4^n}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)^n$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+8}{n^2-5}$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{5}-1\right)$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+7^n}{8^n-2^n}$.

(a) Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, takže diverguje. Protože $a_n > 0$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n} = \infty$.

(b) Sčítaná posloupnost se chová jako $\frac{2+\cos(n)}{n+\ln(n)} \sim \frac{1}{n}$, tedy se pokusíme ukázat, že také diverguje. Proto odhadneme $\frac{2+\cos(n)}{n+\ln(n)} \geq \frac{2+1}{n+n} = \frac{3}{2n}$ odkud $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{n+\ln(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n} = \infty$, tedy i původní řada diverguje.

(c) Otestujeme posloupnost pomocí Cauchyova odmocninového kritéria, tedy budeme zkoumat $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$ konverguje.

(d) Sčítaná posloupnost se chová jako $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, tedy by měla konvergovat. Proto použijeme Cauchyovo kritérium (bod 2 uřitečné vztahy) a přepíšeme řadu na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(2^n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, která konverguje.

(e) Upravme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}$. Pokud nyní uvažujeme již dříve zmíněnou konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a použijeme srovnávací kritérium, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}} = 1,$$

neboli původní řada taky konverguje.

(f) Můžeme použít nám již dobře známý odhad faktoriálu a odhadnout řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$. Na tu použijeme odmocninové kritérium a dostáváme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0$, tedy i původní řada konverguje.

(g) Opět pomocí odmocninového kritéria převedeme problém na limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{(2n^2+n)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, tedy řada konverguje.

(h) Použijeme odhad faktoriálu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$, na což použijeme odmocninové kritérium a máme $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$, tedy řada konverguje.

(i) Můžeme použít Cauchyovo kritérium “obráceně”, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{8^n-4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1+2^{-n}}{2^{3n}-2^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n^3-n^2}$, což jde porovnat s řadou $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ a dostaneme, že zkoumaná řada konverguje.

(j) Použijeme odmocninové kritérium, tedy $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-1)=\infty$ a řada diverguje.

(k) Řada nesplňuje nurnou podmínku konvergence, tedy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+8}{n^2-5}=\infty$.

(l) Využijeme Dirichletova kritéria. Protože $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ konverguje podle srovnávacího kritéria s řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje i zkoumaná řada.

(m) Řada konverguje podle Dirichletova kritéria, protože $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty a $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)=(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5})-1=0$.

(n) Pokud řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+7^n}{8^n-2^n}$ srovnáme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+7^n}{8^n}$ tak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^n+7^n}{8^n-2^n}}{\frac{6^n+7^n}{8^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^n}{8^n-2^n}=1.$$

Druhá řada však konverguje, protože jde o součet dvou konvergentních geometrických řad.

Konvergence v závislosti na parametru

V závislosti na $\alpha\in\mathbb{R}$ a $\beta\in\mathbb{R}^+$ rozhodněte o konvergenci následujících řad

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\beta^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{1+\beta^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\beta^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+2)^n}{\sqrt{n+1}}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n3^n}$.

(a) Pro $\beta\leq 1$ řada nespoňuje nutnou podmínku konvergence. Jinak můžeme řadu srovnat s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta^n}$, což dává $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\beta^n}}{\frac{1}{\beta^n}}=1$, tedy i původní řada konverguje.

(b) Pro $\beta\geq 1$ řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Jinak máme pomocí podílového kritéria $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\beta^{n+1}}{1+\beta^{n+1}}}{\frac{\beta^n}{1+\beta^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(1+\beta^n)}{1+\beta^{n+1}}=\beta<1$, tedy řada konverguje.

(c) Pro $|\alpha|>1$ řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Pro $\alpha=1$ dostáváme harmonickou řadu, která diverguje. Pro $\alpha=-1$ máme omezenou řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ krát řadu splňující nutnou podmínku, tedy podle Dirichletova kritéria konverguje i zkoumaná řada. Jinak řada (absolutně) konverguje, což jde ukázat např. pomocí podílového kritéria $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n n+1}=0$.

(d) Pro $\beta\geq 1$ řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Jinak jde použít podílové kritérium $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4\beta^{n+1}}{n^4\beta^n}=\beta<1$, tedy řada konverguje.

(e) Můžeme předefinovat $\alpha+2=:\tilde{\alpha}$, tedy máme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n+1}}$. Opět pro $|\tilde{\alpha}|\geq 1$ nesplňuje řada nutnou podmínku konvergence. Jinak máme z podílového kritéria $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\tilde{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n+1}}}=\tilde{\alpha}<1$, tedy řada konverguje.

(f) Řadu upravíme na $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^n$, odkud je vidět, že pro $|\alpha|>3$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Pro $\alpha=3$ dostáváme harmonickou řadu, která diverguje a pro $\alpha=-3$ řada konverguje viz (d). Jinak použije podílové kritédium $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^n}=\frac{\alpha}{3}<1$, tedy řada konverguje.