Cvičení 5: Řady

Základní řady

Zamyslete se nad následujícími řadami

- Geometrická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$,
- Zobecněná harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Grafické znázornění

Uvažujte jak jde graficky znázornit řady

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$.

Konvergence

Vyšetřete konvergenci následujících řad

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{n+\ln(n)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\sqrt{n})^n}{(2n^2+n)^{\frac{n}{2}}}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{8^n-4^n}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)^n$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+8}{n^2-5}$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{5}-1\right)$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+7^n}{8^n-2^n}$.

Konvergence v závislosti na parametru

V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}^+$ rozhodněte o konvergenci následujících řad

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{1+\beta^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \beta^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+2)^n}{\sqrt{n+1}}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n 3^n}$.

Užitečné vztahy

Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definujeme částečný součet

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n.$$

Nekonečnou řadu pak definujeme jako $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Řadu nazveme absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Absolutní konvergence implikuje neabsolutní

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy.

- Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *(nutná podmínka konvergence)*
- Pokud $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. *(srovnávací kritérium)*
- Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. *(Cauchyovo odmocninové kritérium)*
- Pokud $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. *(Cauchyovo odmocninové kritérium)*
- Pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. *(d'Alambertovo podílové kritérium)*

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady a nechť $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$.

- Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. *(Dirichletovo kritérium)*
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. *(Abelovo kritérium)*
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. *(Cauchyovo kondenzační kritérium)*