Cvičení 4: Posloupnosti II

Zahřívací příklady

Spočtěte následující limity

(a) $\lim_{n\to\infty}(n - \frac{2n}{2})$,

(b) $\lim_{n\to\infty} n!$,

(c) $\lim_{n\to\infty}(\pi n + 10^{10}\sin(n!))$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4+3n^2+24}{10n^3+n^2-4}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{\sqrt{2n^4+4n^2+2}}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-3)^n}{2^n}$.

(a) $\lim_{n\to\infty}(n - \frac{2n}{2}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

(b) Protože máme odhad $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ a i ten diverguje, bude divergovat i faktoriál.

(c) Přímo

$$\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\pi n}_{\to\infty} + \underbrace{10^{10}\sin(n!)}_{<10^{10}}) = \infty.$$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+(-\frac{2}{3})^n}{1^n} = 0$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n!)}{n}} = \infty$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4+3n^2+24}{10n^3+n^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+\frac{3}{n}+\frac{24}{n^3}}{10+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^3}} = \infty$.

(g) Použijeme odhad $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, tedy pomocí Věty o dvou policajtech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{\sqrt{2n^4+4n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2+\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(i) Pro lichá čísla dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0}{2^n} = 0,$$

zatímco pro sudá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n}{2^n} = \infty.$$

Limita tedy neexistuje.

Složitější příklady

Spočtěte následující limity pro $k, l \in \mathbb{N}$ a $\delta, \beta \in \mathbb{R}$

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)-2\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$, $\quad q \in \mathbb{R}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}-2}{\sqrt{16-\frac{1}{n}}-4}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}+\frac{5}{\ln(n)}}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{\delta}{n}}\sqrt[l]{1+\frac{\beta}{n}}-1\right)$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^5+n!}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$,

(j) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1})$,

(k) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$,

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{\cos(\pi n)}$,

(m) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\delta+\frac{\beta}{n}\right)+\left(\delta+\frac{2\beta}{n}\right)+\cdots+\left(\delta+\frac{(n-1)\beta}{n}\right)\right]$,

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} \overset{\text{dříve}}{=} 1$.

(b) Pomocí součtu řady viz cvičení 2 máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)-2\sum_{i=1}^{n} i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)-2\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = 0.$$

(c) Fce $\arctan(x)$ je omezená a tedy triviálně $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3} = 0$.

(d) Pro $|q| < 1$ máme podíl typu "$\frac{0}{\infty} = 0$". Jinak lze použít dříve dokázaný odhad $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ a fakt, že tento podíl je nezáporný

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2q^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2q^2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\underbrace{\frac{\ln(2q^2)}{2}}_{>0}\underbrace{n\ln(n)}_{\to\infty}} = 0.$$

(e) Vhodně rozšíříme jemnovatele

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}-2}{\sqrt{16-\frac{1}{n}}-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}-2}{\left(\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}-2\right)\left(\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}+2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}+2\right)} = \frac{1}{4}.$$

(f) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}+\frac{5}{\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{2}{n}+\frac{5}{\ln(n)}\right)\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2\ln(n)}{n}+5\frac{\ln(n)}{\ln(n)}} = e^5$.

(g) Onačme $\sqrt[k]{1+\frac{\delta}{n}}\sqrt[l]{1+\frac{\beta}{n}} =: a(k,l)$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a(k,l)-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{a^{kl}(k,l)-1}{a^{kl-1}(k,l)+a^{kl-2}(k,l)+\cdots+a(k,l)},$$

kde $a^{kl}(k,l)-1 = \left(1+\frac{\delta}{n}\right)^l\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^k - 1 = \frac{\delta+\beta}{n}+\ldots$, kde členy $\ldots$ obsahují ve jmenovateli n^2 a víc, které se v limitě neprojeví. Dále je vidět, že $\lim_{n\to\infty} a(k,l) = 1$ a ve jmenovateli je takových členů právě $kl-1$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{\delta}{n}}\sqrt[l]{1+\frac{\beta}{n}}-1\right) = \frac{\delta+\beta}{kl-1}.$$

(h) Už víme, že faktoriál roste rychleji než polynom libovolného řádu i libovolná exponenciála. Proto stačí odhadnout $\frac{3^n+n^5}{n^5+n!} \leq \frac{3^n+n^5}{n!}$. Odtud $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^5+n!} = 0$.

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-1}{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1}) = \lim_{n\to\infty} n\frac{(n^2+2)^3-(n^3+1)^2}{\sum_{i=0}^{5}(n^2+2)^{\frac{i}{2}}(n^3+1)^{\frac{5-i}{3}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{n^6+6n^4+12n+8-n^6-2n^3-1}{\sum_{i=0}^{5}(n^2+2)^{\frac{i}{2}}(n^3+1)^{\frac{5-i}{3}}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{6n^4-2n^3+12n+7}{n^5\sum_{i=0}^{5}(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{i}{2}}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{5-i}{3}}} = 1.$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n+4}-\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2n+4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

(l) Čitatel diverguje, ale jmenovatel je vlastně $(-1)^n$, takže limita neexistuje.

(m)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\delta+\frac{\beta}{n}\right)+\left(\delta+\frac{2\beta}{n}\right)+\cdots+\left(\delta+\frac{(n-1)\beta}{n}\right)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n\delta+\frac{\beta}{n}(1+2+\cdots+(n-1))\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n\delta+\frac{\beta}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\delta+\beta\frac{(n-1)}{2n}\right) = \delta+\frac{\beta}{2}.$$

Rekurentní posloupnosti

Najděte limity posloupností zadaných jako $a_{n+1} = f(a_n)$

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$,

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$,

(c) $a_1 = \sqrt{c},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad c > 0$.

Klíčové v tomto oddílu je si uvědomit, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Pokud tedy existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, pak

(a) Pokud limita existuje, musí pro ni platit $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$. Protože členy posloupnosti jsou kladné, je přípustné pouze kladné řešení. Nyní musíme ukázat konvergenci, k čemuž postačí monotonie a omezenost ze "správné strany". Omezenost plyne z AG nerovnosti[1]

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geq \sqrt{a\frac{2}{a}} = \sqrt{2}.$$

Navíc je posloupnost klesající, protože

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - a_n^2}{a_n}\right) \leq 0,$$

takže je konvergentní k $\sqrt{2}$.

(b) Tato posloupnost zjevně diverguje. Je to vidět i z limitního přechodu $a = a + 1$, což nejde v $\mathbb{R}$ splnit.

(c) Posloupnost je zjevně rostoucím protože[2]

$$a_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n-\text{krát}}.$$

Dále je ale i omezená, protože

$$\begin{aligned} a_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} &\Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ \Leftrightarrow c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}} \leq \frac{1 + 2\sqrt{1+4c} + 1 + 4c}{4} &\Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + 2\sqrt{1+4c} + 1 + 4c - 4c}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sqrt{c} \leq \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}, \end{aligned}$$

což zjevně platí. Faktor, kterým je posloupnost omezená jsme získali tak, že jsme chtěli v dalším kroku stejnou pravou stranu nerovnice. Horní odhad $\delta(c)$ tedy musí splňovat $\delta(c) = \delta^2(c) - c \Leftrightarrow \delta(c) = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

Nyní už je triviální limitu spočítat pomocí $a = \sqrt{a + c} \Rightarrow a = \delta(c) = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, protože nás zajímají pouze kladná řešení (členy posloupnosti jsou kladné).

[1]
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

[2] Můžete si zkusit porovnat sousední členy a umocnit n-krát.