Řešení cvičení 3: Posloupnosti

Výpočet z definice

Přímo pomocí definice spočtěte následující limity[1], nebo dokažte, že neexistují

(a) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\{\ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$,

(e) $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(f) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) Limita je zjevně 1, protože pro libovolné a_n máme $a - a_n = 0 < \epsilon$ pro všechna $\epsilon > 0$. Pro libovolné zadané ϵ nám tedy stačí zvolit $\tilde{n} = 1$, nebo libovolné jiné přirozené číslo.

(b) Je vidět, že $\forall a_n : a_n > 0$ a posloupnost je klesající. Limita ale nemůže být větší než 0, protože pro $a > 0$ bychom mohli najít $a_n < a$. Zkusme tedy $a = 0$. Potom pro zadané $\epsilon > 0$ chceme najít $\tilde{n}$ tak, aby $a_{\tilde{n}} = \frac{1}{\tilde{n}} < \epsilon$. To jistě jde udělat volbou $\tilde{n} = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 5$. Protože je poslounost klesající, bude nerovnost platit $\forall n : n > \tilde{n}$.

(c) Spojitý logaritmus není shora omezen a tak se dá čekat, že jeho diskrétní podoba bude mít nevlastní limitu $+\infty$. Pro zadané $K \in \mathbb{R}$ chceme tedy najít $\tilde{n}$ tak, že $a_{\tilde{n}} = \ln(\tilde{n}) > K$. Odtud tedy dostáváme, že stačí $\tilde{n} = \left\lceil e^{K+1} \right\rceil$. Z monotonie ln opět plyne zbytek.

(d) Stačí použít triviální odhad $n! > n$ a je vidět, že posloupnost bude mít nevlastní limitu $+\infty$. Pro zadané K lze volit $\tilde{n} = K$.

Za povšimnutí stojí, že v tomhle případě se s opravdu špatným odhadem pracuje dobře. Nejde nám o to odhadnout funkci přesně, když si můžeme pomoct, jde s odhadem "plýtvat". Jak špatný odhad $n! > n$ je jsme viděli už ve cvičení 2, kdy se nám podařilo odhadnout $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, neboli faktoriál roste rychleji než libovolný polynom (a ukáže se, že i než libovolná exponenciála).

(e) Po přeznačení $n \leftarrow n + 1$ dostáváme přesně příklad (b) až na první člen posloupnosti. Ten jde ale bez problémů odebrat, protože limita posloupnosti nezáleží na konečném počtu jejích členů. Jde tedy příslušně posunout vztah pro $\tilde{n}$ určený výš.

(f) Použijeme Větu o dvou policajtech s pomocnými posloupnostmi $\{0\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Pro všechna n platí $0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n}$ a tedy jsou splněny předpoklady věty a i tato posloupnost jde k 0. K určení $\tilde{n}$ použijeme stejný postup jako výše, tedy

$$\left|\frac{1}{1+n^2} - 0\right| = \frac{1}{1+n^2} < \epsilon \Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1} \Rightarrow \tilde{n} = \lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rceil + 1.$$

[1] Napište pravidla jak volit $\tilde{n}$ pro libovolná zadaná ϵ, nebo K.

Typické příklady na triky

Následující příklady Vás mají naučit "trikům" pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sin(n^n)}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+n^8}{5^n+10n^2}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{n}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Následující příklady Vás mají naučit "trikům" pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

(a) Stačí použít odhad $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n!)}{n} \le \frac{1}{n}$ a Větu o dvou policajtech (Uřitečné vztahy bod 5). Dostáváme $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{n} = 0$.

(b) Protože $\sin(x) \in [-1,1]$, bude výsledek oscilovat a narůstat. Neboli $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sin(n^n)}$ neexistuje.

(c) Jak jsme zjistili minule, exponenciála roste rychleji než polynom a tak stačí vhodně rozšířit výraz a dostaneme výraz typu $\frac{0}{1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+n^8}{5^n+10n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{n^8}{5^n}}{1^n+\frac{10n^2}{5^n}} = \frac{5\cdot 0+0}{1+0} = 0.$$

(d) Jak je není výraz dobře definován. Musíme tedy udělat úpravu ve tvaru vhodného rozšíření, abychom odstranili problematické odečítání.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1.$$

(e) Použijeme vybranou podposloupnost $n = 2^k$. Zjevně $n\to\infty \Leftrightarrow k\to\infty$. Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log_2(2^k)}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

Všimneme si, že tohle tvrzení platí stejně pro jmenovatel typu $n^m,\ m\in\mathbb{N}$. Plyne z toho, že logaritmus roste pomaleji než polynom.

(f) Tahle limita je typu "1^∞", na což používáme exponencializaci. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = e^0 = 1.$$

Což jsme dostali z minulého příkladu.

Výpočet

Spočtěte limity následujících posloupností, nebo ukažte, že neexistují

(a) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\left\{(-1)^{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\left\{\frac{n!}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$,

(e) $\left\{\frac{q^n}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $q > 1$, $k \in \mathbb{N}$,

(f) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(g) $\left\{\frac{2^n+10^n}{10^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(h) $\left\{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(i) $\left\{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(j) $\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(k) $a_n = \begin{cases} 2^{10\pi n}, & n < 1000 \\ \frac{n^5}{n^6+n!}, & \text{jinak} \end{cases}$.

(a) Stačí výraz rozšířit vhodným doplněním podle $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, neboli

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Čitatel je konstanta a jmenovat je neomezený a kladný, takže máme výraz typu "$+\frac{1}{\infty}$", takže poslounost jde do 0.

(b) Limita této posloupnosti neexistuje. To je jasné z toho, že po sobě následující členy jsou vzdáleny 2. Tedy nepůjde najíc člen posloupnosti, od kterého jsou členy vzdáleny od nějakého čísla méně jak např. $\epsilon = 0.5$.

(c) Oproti předchozímu příkladu se situace mění, protože pro $n > 1$ je $n!$ sudé číslo. Proto $(-1)^{n!} = 1$ pro $n > 1$ a tedy až na první člen, který o limitním chování nerozhoduje dostáváme příklad $2(a)$ a limita zkoumané posloupnosti je 1.

(d) Pokud si vzpomeneme na již zmiňovaný výsledek z cvičení 2, příklad 3.2 (c) $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, tak jde udělat odhad

$$\frac{n!}{n^k} \geq \frac{1}{n^k}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} > n^{\frac{n}{2k}},$$

což diverguje a tedy diverguje i zkoumaná posloupnost. Poučení tedy zní "faktoriál roste rychleji než polynom libovolného řádu".

(e)

(f) Sinus je funkce omezená a tedy jde členy posloupnosti odhadnout $|\frac{\sin(n)}{n}| < \frac{1}{n}$. S výhodou pak jde použít Větu o dvou policajtech na posloupnosti $\{\pm\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, které jsou obě k nule viz výše. Limita zkoumané posloupnosti je tak taky 0.

(g) Po úpravě dostáváme

$$\frac{2^n+10^n}{10^{n+1}} = \frac{1}{10}\frac{\left(\frac{2}{10}\right)^n+1^n}{1^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{10}.$$

(h) Limita opět neexistuje, což jde ukázat podobně jako v (b), protože pro sudá n dostáváme právě (b) (až na znaménko, což je jen posunutí).

(i) Prostým zkoumáním limit samotných výrazů dostáváme

$$\underbrace{n}_{\to\infty}\underbrace{\left(\sqrt{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+1}-1\right)}_{\to 0}.$$

Máme tedy neurčitý výraz typu "$\infty \cdot 0$". Řešení spočívá v úpravě, kterou jsme použili už v (a)

$$n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right) = n\frac{\frac{1}{n}+1-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

(j) Řadu v čítateli jde sečíst pomocí výsledků z minulých cvičení $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Odtud dostáváme

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

(k) Protože konečný počet prvků nerozhoduje o limitním chování, můžeme prvních 1000 členů zahodit. Pro zbytek použijeme odhat

$$0 \overset{n\to\infty}{\leftarrow} 0 < \frac{n^5}{n^6+n!} < \frac{n^5}{n!} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

jak jsme již ukázali v (d).