Cvičení 3: Posloupnosti

Výpočet z definice

Přímo pomocí definice spočtěte následující limity[1], nebo dokažte, že neexistují

(a) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\{\ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$,

(e) $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(f) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Typické příklady na triky

Následující příklady Vás mají naučit "trikům" pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sin(n^n)}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+n^8}{5^n+10n^2}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{n}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Výpočet

Spočtěte limity následujících posloupností, nebo ukažte, že neexistují

(a) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\left\{(-1)^{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\left\{\frac{n!}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$,

(e) $\left\{\frac{q^n}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $q > 1,\ k \in \mathbb{N}$,

(f) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(g) $\left\{\frac{2^n+10^n}{10^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(h) $\left\{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(i) $\left\{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(j) $\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(k) $a_n = \begin{cases} 2^{10\pi n}, & n < 1000 \\ \frac{n^5}{n^6+n!}, & \text{jinak} \end{cases}$.

[1] Napište pravidla jak volit $\tilde{n}$ pro libovolná zadaná ϵ, nebo K.

Užitečné vztahy

Posloupnost je fce $a : \mathbb{N} \to M$, kde jednotlivé členy posloupnosti značíme $a(n) = a_n$. Celou posloupnost pak značíme $(a_n) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnost nazveme

(a) rostoucí (resp. klesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (resp.$a_{n+1} < a_n$),

(b) nerostoucí (resp. neklesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ (resp.$a_{n+1} \geq a_n$).

Mějme nyní reálnou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Číslo a nazveme (vlastní) limitou posloupnosti (a_n), pokud

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ \forall n > \tilde{n} : |a - a_n| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost má nevlastní limitu $\pm\infty$, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ \forall n > \tilde{n} : \pm a_n > K.$$

K označení používáme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim a_n = a.$$

Exponenciála se základem e se dá definovat pomocí nekonečné řady

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{x}{n}\right)^i = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$