Cvičení 2: Funkce

Skládání fcí

Určete $f \circ f \circ f \circ f$ pro

(a) $f(x) = 2x + 1$,

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Pokuste se napsat vzorec pro $i \in \mathbb{N}$ složených fcí f.

Spočetnost množin

Pomocí konstrukce bijektivního zobrazení z/do $\mathbb{N}$ ukažte, že následující množiny jsou spočetné

1. $\mathbb{Z}$,
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
3. $\mathbb{Q}$,
4. $\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n\text{-krát}}$.

Monotonie

Rozhodněte o monotonii následujících posloupností

(a) $\left\{n^2 + (-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(e) $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Konstrukce funkce

Zkonstruujte funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s následujícími vlastnostmi

(a) f je prostá, ale není na,

(b) f je na, ale není prostá,

(c) f je na a každý prvek v obrazu má nekonečně mnoho vzorů.

Min/Max/Sup/Inf fcí

Pro následující funkce najděte jejich minima, maxima, suprema a infima následujících množin

(a) $\{1 | n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{\sin(\frac{\pi}{2}n) | n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $\{\sin(n) | n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $\{\cos(x) | x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)\}$,

(e) $\left\{\frac{x}{1+x} | x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)\right\}$,

(f) $\left\{\frac{1}{x-1} | x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)\right\}$.

Užitečné poznámky

Mějme množiny A, B, C. Potom

- fce $f : A \to B$ je zobrazení (předpis), který každému $x \in A$ přiřazuje nějaké $f(x) \in B$. Obraz množiny A je množina
$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\},$$
- inverzní fce k f je $f^{-1} : B \to A$, která pro libovolnou dvojici $x \in A$ a $y \in B$ splňuje
$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$
- složení dvou zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je fce $h : A \to C$ splňující $h(x) = g(f(x))\ \forall x \in A$. Používá se značení $h = g \circ f$.

Fce $f : A \to B$ je

- prostá, pokud $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,
- na (neboli surjektivní), pokud $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$,
- bijekce, pokud je f prostá a na.

Pro $M \subseteq \mathbb{R}$ a $x \in M$ platí, že

- x je maximum $M \Leftrightarrow\ \forall a \in M : a \leq x$.
- x je minimum $M \Leftrightarrow\ \forall a \in M : a \geq x$.
- x je supremum $M \Leftrightarrow\ (\forall a \in M : a \leq x) \wedge (\forall \epsilon > 0\ \exists b \in M : x - \epsilon \leq b)$.
- x je infimum $M \Leftrightarrow\ (\forall a \in M : a \geq x) \wedge (\forall \epsilon > 0\ \exists b \in M : x + \epsilon \geq b)$.