

Domácí úkol 13

1. Spočítejte následující integrály

(a)

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}},$$

(2 body)

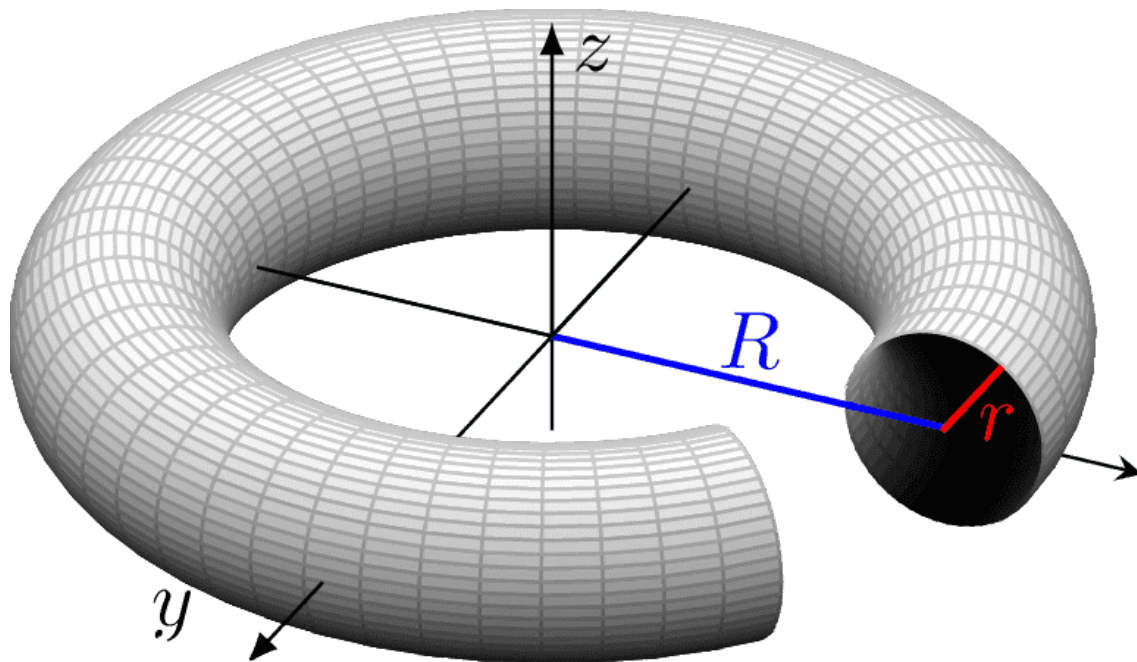
(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1 + \cos^2(x)} dx,$$

(2 body)

2. Spočítejte¹ objem a povrch toroidu (donutu) s “hlavním poloměrem” R a “vedlejším poloměrem” r , viz obrázek.

(3 body)



Obrázek 1: Torus.

¹Neboli nejde jen odhadnout správný výsledek.

Bonus: (deadline 20. 5. 2022 - neboli před absolvováním zápočtového testu)
V tomto úkolu spočteme (určitý) Gaussův integrál.

1. Jak bylo řečeno na cvičeních, neurčitý integrál

$$\int e^{-x^2} dx$$

neexistuje. Nicméně plocha pod touto křivkou by měla být jistě konečná, jak je patrné z Obrázku 1. Ukažte to tak, že najdete funkce splňující

- $f_-(x) \leq e^{-x^2} \leq f_+(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $f_{\pm}(x)$ jsou integrovatelné přes \mathbb{R} a tento integrál je konečný.

2. K výpočtu použijeme trik, který byl opravdu prvním známým postupem pro výpočet tohoto integrálu. Budeme uvažovat součin dvou integrálů typu

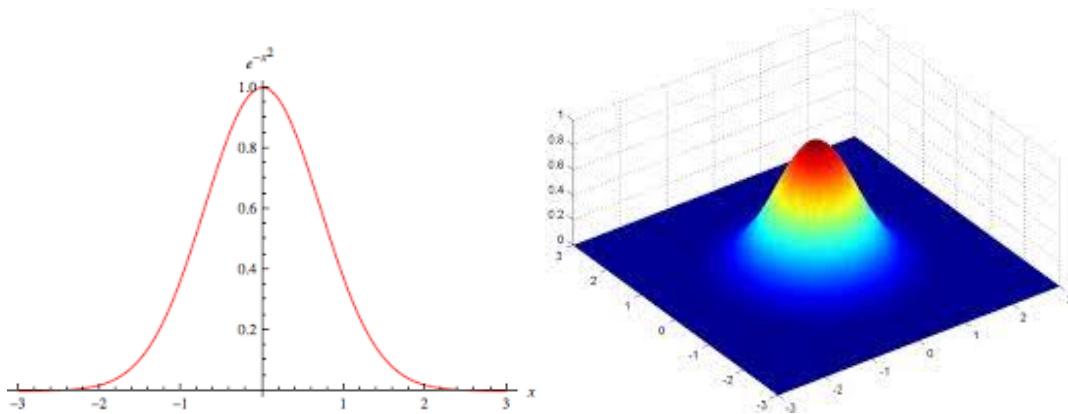
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Takto upravte I^2 - je třeba si uvědomit, že při integraci podle např. x se fce např. y chová jako konstanta.

3. Tento výsledek je zajímavý hlavně v tom, že integrand je fci $x^2 + y^2$. To naznačuje, že výsledek bude rotačně symetrický.

My umíme objem rotačně symetrického tělesa spočítat i jiným způsobem, viz poslední cvičení. Problém ale je, že ten vzorec je pro rotačně symetrické těleso podél x . V tomhle případě máme ale rotační symetrii kolem y a proto budeme muset nejprve určit funkci inverzní a poté ji zintegrovat přes vhodný interval.

4. Tím dostaneme objem rotačně symetrického tělesa a ten jak jsme řekli výše je roven I^2 . Odtud už snadno dostaneme hodnotu hledaného určitého integrálu.



Obrázek 2: Gaussův integrál I (vlevo) a jeho 2D varianta I^2 (vpravo).

(3 bonusové body)