

Cvičení 13: Určitý integrál II

Výpočet

Spočtěte následující integrály pro $k \in \mathbb{N}_0$

(a) $\int_0^2 \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} dx,$

(c) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx,$

(b) $\int_0^9 x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx,$

(d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2(x) \sin^2(x)}.$

Oblasti mezi křivkami

Spočtěte obsah plochy ohraničené následujícími křivkami

(a) $f_1(x) = |x| - 1,$
 $f_2(x) = 1 - x^2$

(c) $f_1(x) = \frac{(x-1)^2}{6} - 1,$
 $f_2(x) = \frac{x^2}{10} + 2,$

(b) $f_1(x) = x + 1,$
 $f_2(x) = -x + 1,$
 $f_3(x) = x - 1,$
 $f_4(x) = -x - 1,$

(d) $f_1(x) = \sqrt{1-x^2},$
 $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Délka křivky

Spočtěte délky následujících křivek mezi a a b

(a) $f(x) = x^2, a = -1, b = 1,$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}, a = 1, b = e,$

(b) $f(x) = e^x, a = 0, b = 5,$

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, a = -1, b = 1.$

Objem tělesa

Spočtěte objem těles vzniklých rotací následujících křivek od a do b

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, a = -1, b = 1,$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 0, b = \infty,$

(b) $f(x) = \frac{r}{h}x, a = 0, b = h,$

(d) $f(x) = r, a = 0, b = h.$

Povrch tělesa

Spočtěte povrch těles vzniklých rotací následujících křivek od a do b

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, a = -1, b = 1,$

(c) $f(x) = r, a = 0, b = h.$

(b) $f(x) = \frac{r}{h}x, a = 0, b = h,$

(d) $f(x) = \sqrt{x}, a = 0, b = 5.$

Užitečné vztahy

Délka křivky

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak délka křivky l grafu mezi a a b je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$

Rotační těleso

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Pak objem tělesa vzniklého rotací grafu f v \mathbb{R}^3 kolem osy x je

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

a jeho povrch je

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$