

## Domácí úkol 11

Spočtete následující integrály

1.

$$\int x \arctan(x) \, dx$$

(2 body)

2.

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx$$

(2 body)

3.

$$\int \frac{6x^3 + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$$

(2 body)

a výsledky ověřte zpětnou derivací.

*Bonus:* (deadline 9. 5. 2022)

V tomto úkolu spočteme Stirlingovu formuli pro aproximaci faktoriálu velkých čísel.

1. Nechť

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx.$$

Vyjádřete  $\Gamma(n+1)$  pomocí  $\Gamma(n)$ . Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\Gamma(n+1) = n!$ .

2. V minulém úkolu jsme odvodili aproximaci

$$\exp[n \ln(x) - x] = \exp\left[n \ln(n) - n - \frac{(x-n)^2}{2n}\right] \left(1 + \frac{(x-n)^3}{3n^2} + \frac{(x-n)^6}{18n^4} + o((x-n)^9)\right),$$

kde poslední závorka je rozvoj chybového členu.

Vyjádřete integrál z definice  $\Gamma(n+1)$  v řeči nové proměnné  $z = x - n$ .

3. Hranice tohoto integrálu bychom rádi protáhli na celé  $\mathbb{R}$ . Chceme tedy ukázat, že doplněk je malý pro velká  $n$ . Zanedbejte proto chybové členy až na jedničku a použijte

$$\int_n^\infty e^{-t^2} \, dt \leq \int_n^\infty \frac{t}{n} e^{-t^2} \, dt$$

.

4. Nechť z nebe spadne

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx,$$

což ukážeme v posledním bonusovém domácím úkolu.

Zanedbejte všechny chybové členy až na první a určete  $\Gamma(n+1)$ . Okomentujte proč jde zanedbat vyšší řády  $z$ , přestože pod integrálem nabývají neomezených hodnot.

5. Nyní máme tedy

$$\Gamma(n+1) = e^{n \ln(n) - n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2n}\right] \left(1 + \frac{z^3}{3n^2} + \frac{z^6}{18n^4} + o(z^9)\right) dz.$$

Argumentujte, proč zahrnutí dalšího chybového členu nezmění výsledek. Není třeba nic počítat.

6. Spočtete<sup>1</sup> Stirlingovu formuli s prvním chybovým členem<sup>2</sup>.

(3 bonusové body)

---

<sup>1</sup>Resp. pokud jste doteď nedávali vše Wolfram, je dobrá příležitost začít.

<sup>2</sup>Tímto postupem vyjde jiná konstanta než je správně. Důvod je ten, že jsme použili příliš hrubé zaokrouhlení chyby na začátku. Pokud bychom měli víc času a vůle, je ale postup k určení vyšších řádů rozvoje přímočarý.