Cvičení 11: Integrál

Základní integrály

Doplňte následující tabulku základních integrálů pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
5	$5x + c$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$5 + 5x$	$5x + \frac{5}{2}x^2 + c$

Snadné integrály

Spočtšte následující integrály

(a) $\int x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x$,

(b) $\int 5e^x + 5e^{5x} + \frac{5}{x} - 5\cos(5x) \, \mathrm{d}x$,

(c) $\int |x| \, \mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$,

(e) $\int \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x$,

(f) $\int \sqrt{x^6} \, \mathrm{d}x$.

(a) $\int x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x \overset{\text{linearita}}{=} \int x^3 \, \mathrm{d}x + 2\int x^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2\cdot 3} + c$.

(b) $\int 5e^x + 5e^{5x} + \frac{5}{x} - 5\cos(5x) \, \mathrm{d}x = 5e^x + e^{5x} + 5\ln(x) - \sin(5x) + c$,

kde jsme použili Větu o substituci na integrály typu $\int e^{5x} \mathrm{d}x \overset{5x=y}{=} \frac{1}{5}\int e^y \mathrm{d}y = \frac{e^y}{5} + c = \frac{e^{5x}}{5} + c$.

(c) Pro $x > 0$ máme $\int |x| \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c_1$. Pro $x < 0$ máme $\int |x| \, \mathrm{d}x = \int -x \, \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c_2$. Pokud nyní chceme celkový integrál, musíme ho správně "sešít" v bodě $x = 0$. To vyžaduje $\lim_{x\to 0^-} -\frac{x^2}{2} + c_2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} + c_1$, neboli $c_1 = c_2$. Výsledek tak jde přehledně zapsat jako $\int |x| \, \mathrm{d}x = \operatorname{sign}(x)\frac{x^2}{2} + c$.

(d) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$,

(e) Buď můžeme výsledek uhádnout, nebo použijeme substituci $\int \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x \overset{1-x=y}{=} -\int \sqrt{y} \, \mathrm{d}y = -\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$.

(f) $\int \sqrt{x^6} \, \mathrm{d}x = \int |x^3| \, \mathrm{d}x$. Odtud dál je postup zcela stejný jako v (c).

Per partes

Spočtšte následující integrály

(a) $\int x\sin(x) \, \mathrm{d}x$,

(b) $\int \ln(x) \, \mathrm{d}x$.

Per partes se většinou používá v upravené podobě

$$\int f(x)G(x) \, \mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) \, \mathrm{d}x,$$

neboli chceme řešit integrál, kde jednu z funkcí umíme zintegrovat a druhé se chceme derivací "zbavit"

(a) V tomto případě se nám nelíbí integrálu x. Proto zvolíme $G(x) = x$, $f(x) = \sin(x)$. To dává

$$\int x\sin(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + c.$$

Včimněme si, že bychom to uměli udělat, i kdybychom zvolili f, g obráceně. Tato varianta vede na

$$\int x\sin(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} \frac{x^2}{2}\sin(x) - \int \frac{x^2}{2}\cos(x)\mathrm{d}x,$$

což nám ale vůbec nepomůže...

(b) Zde na první pohled ani nemáme dvě funkce, ale trik je v tom vzít $f(x) = 1$ a $G(x) = \ln(x)$. Potom

$$\int \ln(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c.$$

Substituce

Spočtšte následující integrály

(a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x$, (b) $\int xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

(a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} e^{2x} = y \\ 2e^{2x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln(1+y) = \frac{\ln(1+e^{2x})}{2}$,

(b) $\int xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} -x^2 = y \\ -2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = -\frac{1}{2}\int e^y\ \mathrm{d}y = -\frac{e^{-x^2}}{2}$.

Parciální zlomky

Spočtšte následující integrály

(a) $\int \frac{1}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$, (b) $\int \frac{2x}{x^2+3x+2}\ \mathrm{d}x$.

Metoda parciálních zlomků používá následující rozklad

$$\frac{1}{(x^{l_1}-a_1)^{k_1}\dots(x^{l_m}-a_m)^{k_m}} =$$
$$\frac{Ax^{l_1-1}+\dots+1}{(x^{l_1}-a_1)^{k_1}} + \frac{Bx^{l_1-1}+\dots+1}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{Cx^{l_m-1}+\dots+1}{(x^{l_m}-a_m)^2} + \frac{Dx^{l_m-1}+\dots+1}{x^{l_m}-a_m},$$

což vypadá dost hrůzostrašně - zkusme to na příkladě

(a) Zde můžeme integrand taky napsat jako $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$, na což aplikujeme náš vzorec. Chceme tedy najít konstanty A, B takové, že

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)}.$$

Protože rovnost musí platit pro členy s x^0 i x^1, máme odtud soustavu rovnic

$$1 = A + B$$
$$0 = A - B$$

což řeší $A = B = \frac{1}{2}$. Odtud tedy

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) + c.$$

(b) Obdobným postupem najdeme kořeny a rozklad

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}.$$

To platí pro $A = -B$ a $1 = 2A + B$, tedy $A = 1$, $B = -1$. Integrál jde tedy přepsat na

$$\int \frac{2x}{x^2+3x+2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2x}{x+1} - \frac{2x}{x+2}\ \mathrm{d}x = 2\int \frac{x+1-1}{x+1} - \frac{x+2-2}{x+2}\ \mathrm{d}x =$$
$$2\int 1 - \frac{1}{x+1} - \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)\ \mathrm{d}x = 2\int -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\ \mathrm{d}x = 2\left(2\ln(x+2) - \ln(x+1)\right) + c.$$

Obtížnější integrály

Spočtšte následující integrály

(a) $\int x^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x$,

(b) $\int e^x \sin(x)\ \mathrm{d}x$,

(c) $\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x$,

(d) $\int \cot(x)\ \mathrm{d}x$,

(e) $\int \tan(x)\ \mathrm{d}x$,

(f) $\int \frac{2x^2}{\cos(x^3)}\ \mathrm{d}x$,

(g) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\ \mathrm{d}x$,

(h) $\int \sin^5(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x$,

(j) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\ \mathrm{d}x$,

(k) $\int \frac{x}{1+x^4}\ \mathrm{d}x$.

(a)

$$\int x^2\ln(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{3^2} + c.$$

(b)

$$I =: \int e^x \sin(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\ \mathrm{d}x =$$
$$e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - I,$$

Neboli přeuspořádáním

$$I = \frac{1}{2}(e^x\sin(x) - e^x\cos(x)) + c.$$

(c)

$$\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x \overset{pp.}{=} x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x^2 = y \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} =$$
$$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\ \mathrm{d}y = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

(d)

$$\int \cot(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \sin(x) = y \\ \cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y = \ln(\sin(x)) + c.$$

(e)

$$\int \tan(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \cos(x) = y \\ -\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = -\int \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y = -\ln(\cos(x)) + c.$$

(f)

$$\int \frac{2x^2}{\cos(x^3)}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x^3 = y \\ 3x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\cos(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(y)}\,\mathrm{d}y =$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \sin(y) = z \\ \cos(y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \end{array} \right\} = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\arctan(z) + c = \frac{2}{3}\arctan(\sin(x^3)) + c$$

(g)

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \ln(x) = y \\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln(y) + c = \ln(\ln(x)) + c.$$

(h)

$$\int \sin^5(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \sin(x) = y \\ \cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int y^5\,\mathrm{d}y = \frac{y^6}{6} + c = \frac{\sin^6(x)}{6} + c.$$

(i)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} e^x = y \\ e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan(y) + c = \arctan(e^x) + c.$$

(j)

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x^2+4x+5 = y \\ 2x+4\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln(y) + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + c.$$

(k)

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} x^2 = y \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\arctan(y) + c = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c.$$