

## Cvičení 11: Integrál

### Základní integrály

Doplňte následující tabulku základních integrálů pro  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
5		$\sin(x)$		$\cos(x)$	
$x^\alpha$		$\frac{1}{\cos^2(x)}$		$\frac{1}{1+x^2}$	
$e^x$		$\frac{1}{x}$		$5 + 5x$	

### Snadné integrály

Spočtěte následující integrály

(a)  $\int x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} dx,$

(d)  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx,$

(b)  $\int 5e^x + 5e^{5x} + \frac{5}{x} - 5 \cos(5x) dx,$

(e)  $\int \sqrt{1-x} dx,$

(c)  $\int |x| dx,$

(f)  $\int \sqrt{x^6} dx.$

### Per partes

Spočtěte následující integrály

(a)  $\int x \sin(x) dx,$

(b)  $\int \ln(x) dx.$

### Substituce

Spočtěte následující integrály

(a)  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx,$

(b)  $\int xe^{-x^2} dx.$

### Parciální zlomky

Spočtěte následující integrály

(a)  $\int \frac{1}{1-x^2} dx,$

(b)  $\int \frac{2x}{x^2+3x+2} dx.$

### Obtížnější integrály

Spočtěte následující integrály

(a)  $\int x^2 \ln(x) dx,$

(e)  $\int \tan(x) dx,$

(i)  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx,$

(b)  $\int e^x \sin(x) dx,$

(f)  $\int \frac{2x^2}{\cos(x^3)} dx,$

(j)  $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx,$

(c)  $\int \arctan(x) dx,$

(g)  $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx,$

(d)  $\int \cot(x) dx,$

(h)  $\int \sin^5(x) \cos(x) dx,$

(k)  $\int \frac{x}{1+x^4} dx.$

## Užitečné vztahy

*Věta o substituci* (alias “inverzní derivace složené fce”)

Mějme  $\phi : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$  a  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $\phi$  má vlastní první derivaci všude na  $(a, b)$ . Pak

$$F(\phi(x)) + c = \int f(\phi(x))\phi'(x) dx,$$

kde  $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  je primitivní funkce  $f$ .

*Integrace per partes* (alias “inverzní derivace součinu”)

Nechť  $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité na  $(\alpha, \beta)$  a  $F, G : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou k nim primitivní funkce. Pak

$$F(x)G(x) + c = \int f(x)G(x) dx + \int F(x)g(x) dx.$$

*Linearita* (alias linearita)

Nechť  $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité a  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Pak

$$\int \alpha f + \beta g dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$$