Řešení cvičení 1: Opakování

Definiční obory

Najděte definiční obory $D_f \subset \mathbb{R}$ následujících funkcí

(a) $f : y = \sqrt{x-3}$,

(b) $f : y = \log_2\left(\dfrac{x}{x^2-4}\right)$,

(c) $f : y = \sqrt{\ln\left(\sqrt{x^2-4x+4} - x\right)}$,

(d) $f : y = \sin^{-1}(\pi x)$,

(e) $f : y = \left(\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - \frac{1}{2}}\right)^2 - \frac{1}{4}}\right)^2 \dots}\right)^2$,

Při určování definičních oborů si musíme dávat pozor (většinou) na odmocninu, logaritmus a jmenovatel.

(a) Zde je situace jednoduchá, $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in [3, \infty)$.

(b) Zde máme podíl a logaritmus. Co se podílu týče, je třeba odebrat body $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Dále argument logaritmu musí být kladný, tedy

$$\frac{x}{x^2-4} > 0.$$

Vidíme, že ve jmenovateli se mění znaménko v bodech $x = \pm 2$ a v čitateli v $x = 0$. To nám dělí $\mathbb{R}$ na čtyři intervaly, ve kterých stačí otestovat jeden bod a zjistíme, jestli nerovnici splňují. Řešením je

$$x \in (-2, 0) \cup (2, \infty).$$

(c) Výpočet je delší, ale není obtížnější. Nejprve je třeba zjistit

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},$$

poté díky logaritmu

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - x > 0.$$

Přirozené by bylo odečíst x a obě stranu umocnit, ale přitom musíme pamatovat, že parabola je klesající pro $x < 0$ a tedy změní znaménko nerovnosti. Pro kladná x tak máme

$$x^2 - 4x + 4 > x^2 \Leftrightarrow -4x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Pro záporná x je nerovnost vždy splněna, protože

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,$$

tedy bude vždy větší než záporné x. Konečně dostáváme poslední odmocninu a musíme najít x takové, že

$$\ln(\sqrt{x^2 - 4x + 4} - x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} > x + 1.$$

Umocnění je opět ekvivalentní úprava pouze pro $x + 1 > 0$. V opačném případě je nerovnice ale opět splněna. Pro $x > -1$ jde tedy nerovnici umocnit a dostáváme

$$x^2 - 4x + 4 > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Pokud nyní dáme všechny podmínky dohromady, tak dostáváme výsledný definiční obor $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

(d) Musíme zajistit, aby ve jmenovateli nebyla nula. To nastává pro $\sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$. Řešením tedy je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(e) Tady se vyplatí postupovat postupně “zevnitř”. První omezení dává vnitřní odmocnina na $x \geq 1$. Pokud tedy pracujeme na $(1, \infty)$ jde rovnici upravit na

$$y = \left(\sqrt{ \left(\sqrt{ \left(\sqrt{x - 1} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} } \right)^2 \dots } \right)^2 .$$

Což znamená, že x je nyní omezeno na $x \geq \frac{3}{2}$. Takto můžeme postupovat dál. V kroku k bude interval omezen na (viz součet geometrické řady)

$$x \geq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} = 2 - 2^{-k}.$$

Je tedy vidět, že v každém kroku se spodní hranice intervalu dvakrát přiblíží k $x = 2$. Po nekonečně mnoha krocích (což se snadněji řekne než udělá - více později) dostáváme omezení $x \geq 2$.

Rovnice a nerovnice

Řešte následující (ne)rovnice v $\mathbb{R}$

(a) $\dfrac{x-4}{x+2} < 3$,

(b) $|2x^2 - 2x - 4| < |x^2 + x - 2|$,

(c) $\log_2(x-1) = 10$,

(d) $\log_\pi(x^2 - 3) \geq 0$,

(e) $\sin(x) = \sin(2x)$,

(f) $\sin(x) = \sin(3x)$,

(g) $\left|\sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| < \dfrac{1}{2}$,

(h) $2x^3 - 4x^2 - 38x + 40 = 0$,

(i) $\log_2(2x^2 - 4) - \log_2(x) = \log_2(2)$,

(j) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x - 2) \geq 0$,

(k) $||x-2| + 1| \leq 5$.

(a) Hledáme řešení na $x \in \mathbb{R} \setminus -2$. Chtěli bychom zjednodušit situaci přenásobením členem $x + 2$, nicméně nevíme nic o jeho znaménku. Proto rozdělíme řešení na dva intervaly

$$\begin{array}{ll} x + 2 < 0 : & x + 2 > 0 : \\ x - 4 > 3(x+2) & x - 4 < 3(x+2) \\ -10 > 2x & \\ \Rightarrow (x < -5) \ \cap \ (x < -2) & \Rightarrow (x > -5) \ \cap \ (x > -2) \end{array}$$

neboli

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-2, \infty).$$

(b) Nejprve upravíme nerovnici na

$$2|x-2||x+1| < |x-1||x+2|,$$

což je třeba řešit na pěti různých intervalech oddělených $\{-2, -1, 1, 2\}$. Při řešení určitě pomůže obrázek obou funkcí, ale i bez něj se řešení dá najít. Uvažujme například interval $x \in [-1, 1]$, kde má nerovnice tvar

$$-2(x-2)(x+1) < -(x-1)(x+2),$$

z čehož po úpravách dostaneme

$$x^2 - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right) \approx \mathbb{R} \setminus (-0.56, 3.56).$$

Protože hledáme řešení jen na $x \in [-1,1]$, tak nerovnici vyhovují $x \in \left[-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$. Obdobně pokračujeme na ostatních intervalech. Finální řešení je

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{73}}{6}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{73}}{6}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Všimněme si, že $|x| \gg 0$ nerovnici neřeší. To odpovídá intuici, protože pro velká $|x|$ lze zanedbat vše až na nejvyšší řád polynomu a levá strana v tomto přiblížení roste 2x rychleji než pravá a nemůže proto být menší.

(c) Řešení spočívá v prostém odlogaritmování

$$\log_2(x-1) = 10 \Rightarrow x = 1 + 2^{10} = 1025.$$

(d) Je třeba si uvědomit, že $\pi > 1$ a tedy logaritmus je rostoucí. Nerovnice tedy jde přepsat na

$$x^2 - 3 \geq 1 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [2, \infty).$$

Nyní je třeba ještě vyloučit ty x, pro která není nerovnice dobře definovaná. To jsou ta, pro která $x^2 - 3 \leq 0$, tedy $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Protože $\sqrt{3} < 2$, nenarazíme zde na problém.

(e) Je třeba využít vzorec pro dvojnásobný úhel

$$\sin(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

neboli

$$0 = \sin(x)(1 - 2\cos(x)).$$

Máme tedy dva druhy řešení

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(x) \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} &= \cos(x) \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(f) Řešení je delší, postup je však přímočarý. Nejprve použijeme součtový vzorec pro sinus, pak pro dvojnásobný úhel a konečně goniometrickou jednotku

$$\begin{aligned} \sin(3x) = \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x) = \sin(x)(\cos(2x) + 2\cos^2(x)) = \\ \sin(x)(3\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1) = \\ \sin(x)(2\cos(x) - 1)(2\cos(x) + 1). \end{aligned}$$

Tedy po úpravě

$$\sin(x) = \sin(x)(3\cos^2(x) - \sin^2(x)),$$

tedy jde pokrátit $\sin(x)$ a tím získat řešení

$$0 = \sin(x) \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dále dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} 1 &= 3\cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 3\cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 2\sin^2(x) &= 2\cos^2(x) \\ 0 &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 0 &= \cos(2x) \end{aligned}$$

Odtud rovnou vidíme další řešení

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Za poznámku stojí, že jde celý tento postup přeskočit, pokud si pamatujeme vzorec

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

(g) Stačí si uvědomit, kdy $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$. Zbytek bude pouze posunutý a díky absolutní hodnotě $\pi-$periodický. Řešení je

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{4k+1}{2}, \frac{6k+2}{3}\right).$$

(h) Jde o polynom třetího řádu, pro než nemáme žádné vzorce. Nicméně řešení lze stále hledat "hrubou silou". K tomu pomůže obě strany vydělit 2. Po chvíli lze zjistit, že např. 1 rovnici řeší. Po vydělení $(x-1)$ dostáváme kvadratickou rovnici, kterou už umíme řešit přímo. Všechna řešení jsou $x \in \{-4, 1, 5\}$. Nastřelováním bychom se ale mnoho nenaučili. Pro řešení polynomiálních rovnic však existuje pomůcka.
Věta (rational root theorem):
Všechny racionální kořeny libovolného polynomu s celočíselními koeficieny

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

jsou ve tvaru $x = \frac{p}{q}$, kde p je dělitelem a_0 a q je dělitelem a_n.

Tato věta výrazně redukuje počet možností, které bychom museli zkusit. Nicméně věta hovoří jen o *racionálních* řešeních. Všimněme si, že všechna řešení výše opravdu tuhle větu splňují.

(i) Použijeme pravidlo o součtu logaritmů a dostáváme

$$\log_2\left(\frac{2x^2-4}{2x}\right) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2-x-2) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 2.$$

Jako v minulém příkladu je třeba zkontrolovat, že řešení je v definičním oboru. Pro $x = 2$ rovnice sedí, nicméně pro $x = -1$ dostáváme $\log_2(-1)$, což není dobře definované (a první člen taky nedává smysl, ale to už výsledek neovlivní). Řešením je tedy pouze $x = 2$.

(j) Odlogaritmování není zcela přímočaré, protože se základem $\frac{1}{2}$ je logaritmus klesající. Proto dostaneme po odlogaritmování

$$x^2 - 3x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right].$$

Nicméně je opět třeba přihlédnout k definičnímu oboru logaritmu

$$x^2 - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \infty\right).$$

Odtud dostáváme celkové řešení

$$x \in \left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right].$$

(k) Máme vnořené absolutní hodnoty. Budeme je odstraňovat postupně "zevnitř", tedy pro $x \geq 2$ máme

$$|x - 2 + 1| = |x - 1| \leq 5.$$

Nyní se řešení dále štěpí na dva podintervaly, nicméně musíme mít na paměti, že už pracujeme na $[2, \infty)$, takže $x - 1 \geq 0$ a štěpení tedy není třeba. Takže

$$x - 1 \leq 5 \Rightarrow x \in [2, 6].$$

V případě $x < 2$ dostáváme

$$|-x + 2 + 1| = |3 - x| \leq 5.$$

Opět nás zajímá pouze možnost a na $x < 2$ se nerovnice redukuje na

$$3 - x \leq 5 \Rightarrow x \in [-2, 2).$$

Celkový interval je sjednocení částečných řešení, tedy $x \in [-2, 6]$. Tento výsledek nepřekvapí, protože "vnější" absolutní hodnota nepřináší nic nového v tomto případě, protože její argument je kladný $\forall x \in \mathbb{R}$.

Konstrukce množin

Určete, co jsou následující množiny

$$(a)\ \{x \in \mathbb{R} : (\exists a \in \mathbb{R})(|1 + x\sqrt{a}| \leq 2ax^2)\},$$
$$(b)\ \{a \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R})(|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}.$$

(a) Hledáme všechna $x \in \mathbb{R}$ taková, že existuje $a \in \mathbb{R}$takové, že platí nerovnice. Budeme nad nerovnicí uvažovat tak, že obě strany nejsou funkcí x s fixním a, ale jsou to funkce $\sqrt{a}x =: \tilde{x}$. To jistě můžeme, protože chceme pouze ukázat, že nějaké a existuje. Potom pro velká $\tilde{x}$ se bude nerovnice chovat jako

$$|\tilde{x}| \sim |1 + x\sqrt{a}| \leq 2ax^2 \sim \tilde{x}^2.$$

Protože volbou a můžeme pro $|x| > 0$ udělat $\tilde{x}$ libovolně velké, tak řešením je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Zajímá nás implikace $|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5$. Důležité je si uvědomit, že ta nebude splněna pouze pokud $|x - 2| \leq 1$ a zároveň $x^2 - ax \leq 5$. Zajímáme se tedy pouze o $x \in (1, 3)$ a pro ně chceme najít a tak, aby

$$x^2 - ax > 5 \Leftrightarrow a < \frac{x^2 - 5}{x} = x - \frac{5}{x}.$$

Dosazením krajních bodů dostaneme $x = 1: \ a < -4$ a $x = 3: \ a < \frac{4}{3}$. Nyní bychom rádi ukázali, že pravá strana je klesající fcí x. Nicméně to je jasně vidět, protože jak x, tak $-\frac{5}{x}$ jsou rostoucí fce. Omezení dané přísnějším z těch obdržených v krajních bodech bude tedy dostatečné na celé $x \in (1, 3)$. Mimo tento interval neplatí $|x - 2| \leq 1$ a tedy implikace platí pro všechna x. Výsledná množina tedy je $a \in (-\infty, -4)$.

Odhady

Dokažte následující odhady pro $x \geq -2$ a $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&(a)\ n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n > 1,\\
&(b)\ (1+x)^n \geq 1 + nx,\\
&(c)\ n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Hint: v (b) a (c) ukažte platnost pro $n = 1, 2$ a indukční krok dělejte zvlášť pro sudá a liná n.

(a) Použijeme klasický důkaz indukcí. Pro $n = 2$ dostáváme $2 < 9/4$, tedy je nerovnost splněna. Přistoupíme k indukčnímu kroku (více o něm v oddílu 3.3)

$$
(n+1)! = (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1},
$$

neboli

$$
1 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
$$

Pravá strana pro $n = 2$ dává $\approx 1.19 > 1$ a tedy je nerovnost splněna. Navíc je pravá strana rostoucí funkcí n a tedy bude nerovnost splněna $\forall n \in \mathbb{N}$. Výraz na pravé straně je opravdu zajímavý a setkáme se s ním i později, protože představuje definici Eulerova čísla

$$
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e \approx 2.72,
$$

což je jedna z fundamentálních konstant přírody.

(b) Budeme postupovat tak, že rozdělíme n na sudá a lichá a dokážeme nerovnost zvlášť pro obě možnosti. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna triviálně. Pro $n = 2$ dostáváme $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$, což je opět pravda. Přistupme k indukčnímu kroku, který zní

$$
(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x.
$$

S využitím indukčního předpokladu

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+2} = (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+2x+x^2) = 1 + 2x + x^2 + nx + 2nx^2 + nx^3 = \\
1 + (n+2)x + nx^2(x+2) + x^2.
\end{aligned}
$$

Protože $x^2 \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0$ dostáváme $(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x$, což je přesně co jsme chtěli ukázat.

(c) Pro $n = 1, 2$ nerovnost platí. Pro sudá $n = 2m$ dostáváme

$$
n! = (2m)(2m-1)\dots(m+1)m! > (2m)\dots(m+1) > m^m = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}},
$$

zatímco pro lichá $n = 2m+1$

$$
n! = (2m+1)(2m)\dots(m+1)m! > (2m+1)\dots(m+1) > (m+1)^{m+1} > \left(m + \frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.
$$

Tvrzení

Dokažte následující vztahy přímo, nepřímo, sporem, nebo indukcí

$$(a)\ \forall a,b,c \in \mathbb{R} : a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc,$$
$$(b)\ \forall a,b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2,$$
$$(c)\ \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$(d)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}_0 : n^2-n=2k,$$
$$(e)\ \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2,$$
$$(f)\ \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ je dělitelné } 3 \ \Rightarrow n \text{ je dělitelné } 3\ .$$

Hint: přímo: (a), (d), nepřímo: (f), sporem: (b), indukcí: (c), (e)

Nalezení "správného" typu důkazu není vždy snadné. Dělíme je na víc typů podle "přístupu" k problému. Přímý důkaz ukáže přímo, že $A \Rightarrow B$. Důkaz nepřímý se snaží o to samé, ale není to na první pohled jasné, protože ukazuje $\neg B \Rightarrow \neg A$. Jak jsme ale ukázali dříve, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Pokud děláme důkaz sporem, tak se snažíme ukázat, že pokud dokazované tvrzení neplatí, plyne z toho neplatnost jiného tvrzení, o kterém víme, že platné je. Konečně v důkazu indukcí ukážeme, že daná rovnost závislá na parametru n platí pro nějakou hodnotu (většinou $n = 1$) a že z platnosti pro libovolnou hodnotu n dostaneme platnost pro hodnotu $n + 1$. Tvrzení pak platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Projděme nyní tvrzení ze zadání.

(a) *přímo*: Uvažujme následující nerovnost

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0.$$

Ta je jistě platná $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. Po roznásobení dostaneme

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0.$$

Po přeuspořádání dostaneme přímo dokazovaný vztah.

(b) *sporem*: Pokud neplatí $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, pak

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} < 2 \quad / \cdot ab,$$

$$a^2+b^2 < 2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 < 0.$$

To je spor, protože druhá mocnina reálného čísla je nezáporná. Všimněme si, že jsme potřebovali fakt, že a, b jsou kladná při úpravách.

(c) *indukcí*: Pro $n = 1$ je rovnost zjevně splněná. Přejděme proto hned k druhému kroku, neboli k záměně $n \to n + 1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nyní využijeme indukčního předpokladu $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

a tím je důkaz dokončen.

K tomuto vztahu se váže historka - na základní škole byla prý jednou paní učitelka matematiky z mladého Carla Gausse unavená a tak mu dala za úkol sečíst čísla od 1 do 100. Nicméně se ho tím nezbavila na dlouho. Gaussův přístup k výpočtu byl trochu jiný než jsme naznačili zde - všiml si, že první a poslední člen sumy dávají stejný součet jako druhý a předposlední atd. To vlastně představuje přímý důkaz tvrzení výše.

(d) *přímo*: Tvrzení jde slovy formulovat taky jako "číslo $n^2 - n$ je sudé". To lze snadno nahlédnout po úpravě
$$n^2 - n = n(n-1).$$

(e) *indukcí*: Pro $n = 1$ rovnost zjevně platí, přejděme tak rovnou k indukčnímu kroku
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2n+1) = (n+1)^2.$$
Opět použijeme indukční předpoklad $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$
$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$
a dostali jsme rovnost.

(f) *nepřímo*: Budeme se snažit dokázat tvrzení nepřímo, tedy budeme dokazovat "Pokud n není dělitelné třemi, pak ani n^2 není dělitelné třemi". Tedy jestliže n není dělitelní třemi, pak jde napsat
$$n = 3k+1 \ \vee n = 3k+2,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Potom ovšem
$$n^2 = (3k+1)^2 = 3\underbrace{(3k^2+2k)}_{\in\mathbb{Z}}+1$$
a tedy ani n^2 není dělitelné třemi. Podobně v druhém případě
$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{\in\mathbb{Z}}+1.$$