Cvičení 1: Opakování

Definiční obory

Najděte definiční obory $D_f \subset \mathbb{R}$ následujících funkcí

(a) $f : y = \sqrt{x-3}$,

(b) $f : y = \log_2\left(\dfrac{x}{x^2-4}\right)$,

(c) $f : y = \sqrt{\ln\left(\sqrt{x^2-4x+4}-x\right)}$,

(d) $f : y = \sin^{-1}(\pi x)$,

(e) $f : y = \left(\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\frac{1}{2}}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)^2\dots}\right)^2$,

Rovnice a nerovnice

Řešte následující (ne)rovnice v $\mathbb{R}$

(a) $\dfrac{x-4}{x+2} < 3$,

(b) $|2x^2-2x-4| < |x^2+x-2|$,

(c) $\log_2(x-1) = 10$,

(d) $\log_\pi(x^2-3) \geq 0$,

(e) $\sin(x) = \sin(2x)$,

(f) $\sin(x) = \sin(3x)$,

(g) $\left|\sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| < \dfrac{1}{2}$,

(h) $2x^3-4x^2-38x+40 = 0$,

(i) $\log_2(2x^2-4) - \log_2(x) = \log_2(2)$,

(j) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x-2) \geq 0$,

(k) $||x-2|+1| \leq 5$.

Konstrukce množin

Určete, co jsou následující množiny

(a) $\{x \in \mathbb{R} : (\exists a \in \mathbb{R})(|1+x\sqrt{a}| \leq 2ax^2)\}$,

(b) $\{a \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \leq 1 \Rightarrow x^2-ax > 5)\}$.

Odhady

Dokažte následující odhady pro $x \geq -2$ a $n \in \mathbb{N}$

(a) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n > 1$,

(b) $(1+x)^n \geq 1+nx$,

(c) $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Hint: v (b) a (c) ukažte platnost pro $n = 1, 2$ a indukční krok dělejte zvlášť pro sudá a liná n.

Tvrzení

Dokažte následující vztahy přímo, nepřímo, sporem, nebo indukcí

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$,

(b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$,

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$,

(d) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}_0 : n^2-n = 2k$,

(e) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$,

(f) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ je dělitelné 3 $\Rightarrow n$ je dělitelné 3 .

Hint: přímo: (a), (d), nepřímo: (f), sporem: (b), indukcí: (c), (e)

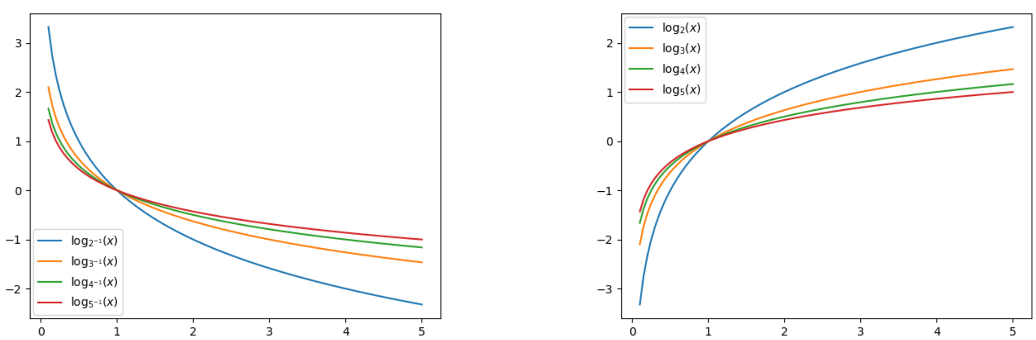
Užitečné vztahy

Pro goniometrické funkce platí

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
$$

Pro logaritmus platí

$$
\begin{aligned}
\forall a, x, y \in (0, \infty) : \log_a(x) + \log_a(y) &= \log_a(xy) \\
\forall a, x \in (0, \infty)\ \forall y \in \mathbb{R} : y \log_a(x) &= \log_a(x^y) \\
\forall a, b, x \in (0, \infty) : \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
\end{aligned}
$$



(a) $a < 1$ (b) $a > 1$

Obrázek 1: $y = \log_a(x)$