Domácí úkol 9

Načrtněte graf funkcí

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(1 bod)

$$g(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

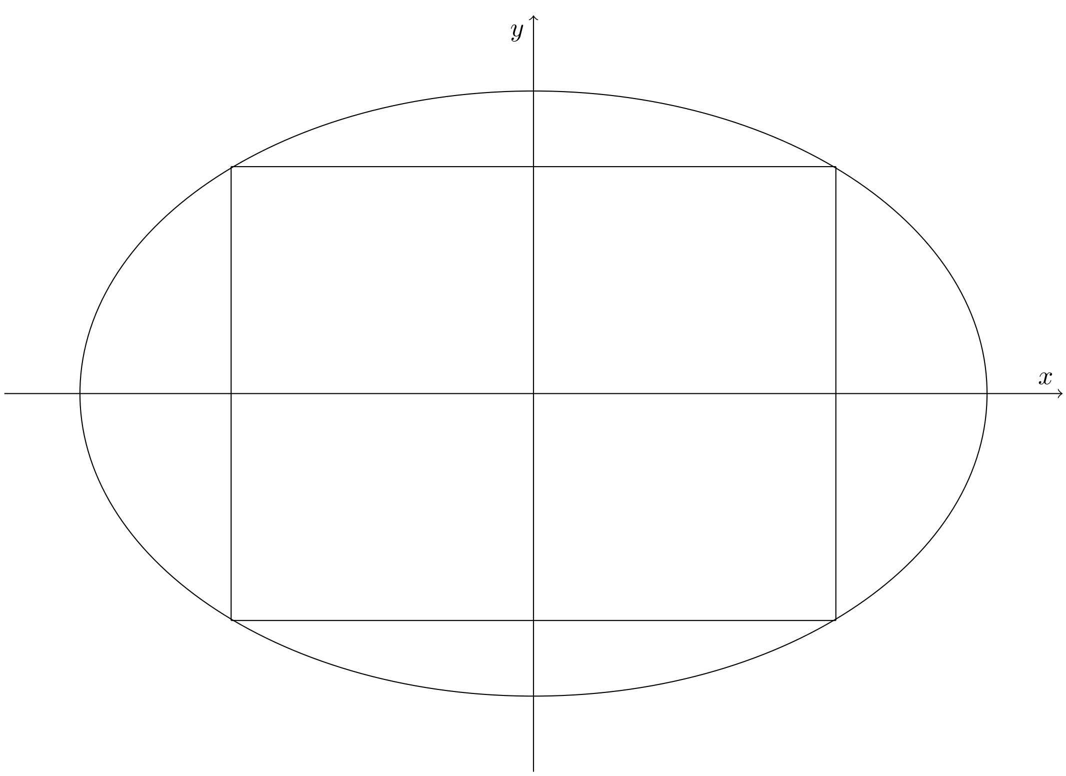
(1 bod)

a najděte polohy maxim/minim, pokud existují.
V druhém příkladu se může hodit $(x-2)e^x - 2 = 0 \Rightarrow x \approx 2.22$.

Uvažujte elipsu

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

a v ní vepsaný obdélník, viz (ilustrativní) obrázek. Jaké jsou rozměry stran obdélníku, aby měl maximální obsah?



(2 body)

Bonus: (deadline 12. 5. 2021)

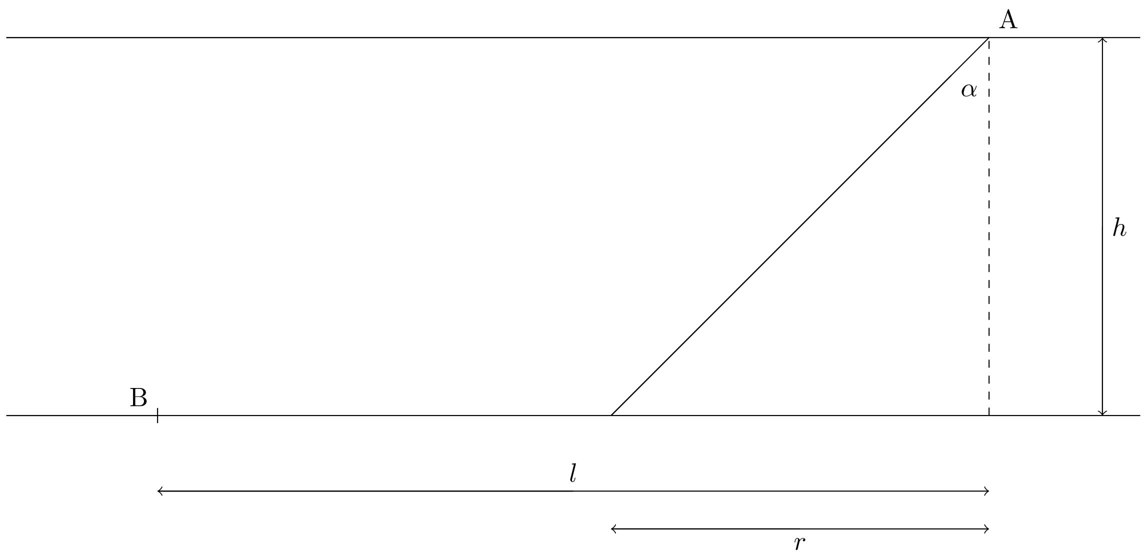
Vrcholový sportovec se potřebuje dostat z bodu A do bodu B, viz obrázek níž. V cestě mu leží řeka šířky h, kterou může sportovec plavat rychlostí v_p. Na druhé straně řeky je běžecká dráha, na které může sportovec běžet rychlostí $v_b > v_p$.

- Vyjádřete celkovou dráhu, kterou musí sportovec urazit pomocí l, h a r.
- Pomocí vzorce "čas = dráha/rychlost" vyjádřete celkový čas, který sportovec stráví na cestě z A do B.
- Spočtěte takové r, pro které je tento čas minimální.
- Odstraňte závislost na r tak, že vyjádříte $r = r(\alpha, h)$ a pomocí toho určete optimální směr, kterým byste měli sportovce vyslat, aby dorazil do cíle v co nejkratším čase.
- Sportovce speciálně zajímá, jaký bude celkový času závodu ve dvou krajních případech

  (a) řeka z medu, tj. $v_p \ll v_b$,

  (b) úzká řeka, tj. $h \ll l$.

  Spočtěte proto Tayloru aproximaci řešení $T = T(h, l, v_p, v_b)$ v těchto limitách. Sportovci bude stačit jen první řád rozvoje.



(2 bonusové body)