Cvičení 9: Průběh funkce

1 Extrémy

Následující postup se může zdát “příliš složitý”. Samozřejmě by šlo si příslušné funkce vykreslit v nějakém softwaru a dostat odpověď velice rychle, ale je dobré postupu rozumět a umět se v něm orientovat. Časem Vás možná budou zajímat extrémy mnohadimenzionálních funkcí, které nepůjdou snadno znázornit a bude třeba se uchýlit k tomuto postupu.

(a) $y = 2\sin(2x) + 2x$ na $[0, 4]$
Nejprve spočteme derivaci, kterou položíme nule. Víme, že kde derivace existuje, tam může být lokální maximum pouze pokud je derivace nulová

$$y' = 4\cos(2x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}.$$

Řešení této rovnice je $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. Na našem intervalu je to $x = \frac{\pi}{3}$ a $x = \frac{4\pi}{3}$. Těmto extrémům odpovídají funkční hodnoty $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \approx 3.83$ a $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \approx 2.46$.

Zbývá nám tedy vyřešit krajní hodnoty a hodnoty, kde derivace neexistuje. Rovnou vidíme, že na zkoumaném intervalu existuje derivace všude. Budeme se tedy zajímat pouze o krajní body, kde

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(4) &= 2\sin(8) + 8 \approx 9.98. \end{aligned}$$

Lokální extrémy uvnitř intervalu tedy nejsou maxima/minima na daném intervalu a jsou jimi krajní body.

(b) $x^2 e^{-x}$ na $\mathbb{R}$
Opět jako první krok spočteme derivaci a budeme studovat její nulovost

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (2 - x)xe^{-x} = 0.$$

Odtud jsou rovnou vidět kořeny $x = 0$ a $x = 2$. Stačí v nich spočítat příslušné hodnoty

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(2) &\approx 0.54. \end{aligned}$$

Derivace opět existuje všude, takže stačí zkoumat limity v “krajních bodech”, tedy v nekonečnech. V tomto případě jsou primitivní

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} &= 0, \\ \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} &= \infty. \end{aligned}$$

Minimum je tedy v $x = 0$ a maximum neexistuje.

2 Průběh

Postup je vždy stejný

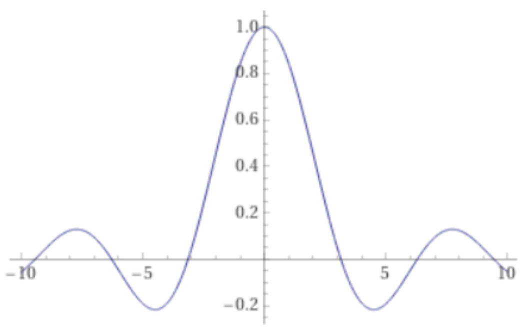
- Spočteme derivaci a položíme ji rovnou nule, čímž najdeme extrémy, kde derivace existuje.
- Pomocí druhé derivace určíme, jde-li o maximum, minimum, či "konstantní plato".
- Dopočteme limity tam, kde derivace neexistuje a v nekonečnech.
- Vše poskládáme a načrtneme graf.

(a) $y = \frac{\sin(x)}{x}$

- $y' = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \tan(x)$. To neumíme vyjádřit přesně, nicméně je vidět, že řešení bude nekonečně mnoho. Taky je vidět, že velikost derivace klesá se zvětšující se absolutní hodnotou x, tedy se "vlnění funkce zmenšuje".
- $y'' = -\frac{(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)}{x^3}$, což nám moc nepomůže. Je ale vidět, že v nule se blíží k něčemu zápornému $\Rightarrow$ v nule je ostré maximum.
- Funkce není dobře definovaná v $x = 0$. Tam už ale limitu dobře známe

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

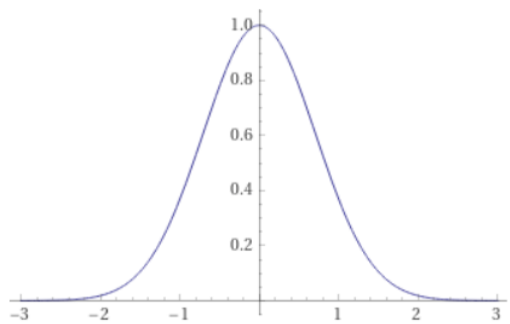
Funkce je vlastně sin tlumený $\frac{1}{x}$, takže tvar nepřekvapí



(b) $y = e^{-x^2}$

- $y' = -2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Máme tedy jediný extrém v nule.
- $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Vyčíleno v nule $y''(0) = -2 > 0$, tedy jde o maximum.
- $$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Funkce tedy vypadá jako takový hrb symetricky rozložený kolem $x = 0$. Je to tkz. Gaussova funkce a je extrémně důležitá v mnoha oblastech. V jistém smyslu je to ta "nejzákladnější" funkce.



(c) $y = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

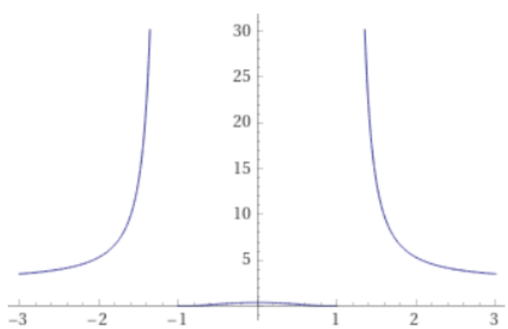
- $y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$. Derivace je tedy nulová v nule a neexistuje v $x = \pm 1$.
- $y'' = \frac{4(3x^4+2x^2-1)}{(x^2-1)^4} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, což je v $x = 0$ záporné, tedy v nule je lokální maximum.
- Limity v nekonečnech jsou snadné. Pro limity k ± 1 použijeme rozklad

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = e,$$
$$\lim_{x \to \pm 1} e^{1+\frac{2}{x^2-1}}.$$

Je vidět, že druhá limita neexistuje. Pokud se k např. 1 blížíme z kladných hodnot, pak jde exponent k nekonečnu. Pokud ale jdeme směrem od nuly, je exponent záporný a jde k mínus nekonečnu

$$\lim_{x \to \pm 1^+} e^{1+\frac{2}{x^2-1}} = \infty,$$
$$\lim_{x \to \pm 1^-} e^{1+\frac{2}{x^2-1}} = 0.$$

Odtud už jde snadno poskládat, jak má funkce vypadat.



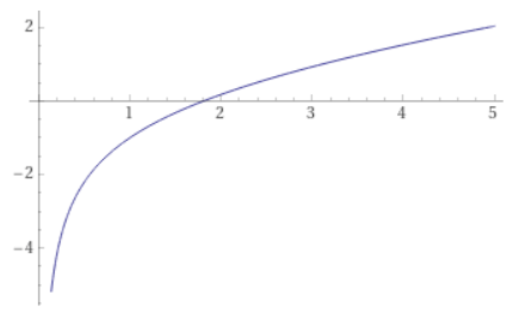
(d) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

- $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} > 0$. Funkce je dobře definovaná jen pro $x > 0$, kde jsou oba členy kladné a tedy je funkce rostoucí.
- $y'' = -\frac{4x^{\frac{7}{6}}+27}{18x^{\frac{5}{2}}}$. To nám ale mnoho neřekne krom toho, že je vždy záporná. Funkce je tedy konkávní.

- Příslušné limity jsou opět snadné

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Tedy dostáváme



(e) $y = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

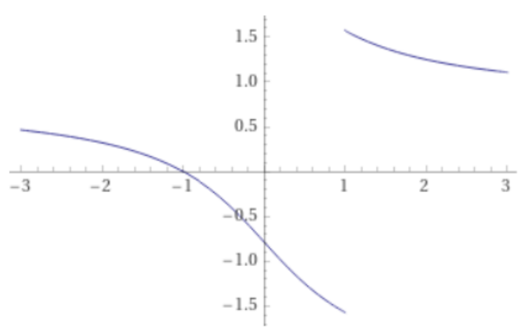
- $y' = -\frac{1}{x^2+1} < 0$, tedy funkce je klesající všude.
- $y'' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, tedy funkce je konvexní pro $x > 0$ a konkávní pro $x < 0$.
- Funkce není dobře definovaná pro $x = 1$, takže spočteme limitu i tam. K tomu si jí opět rozepíšeme

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to 1} \arctan\left(1 + \frac{2}{x-1}\right).$$

Opět vidíme, že druhá limita neexistuje, protože

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1^-} \arctan\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Odtud už snadno načrtneme



(f) $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$

- $y' = -1 + \frac{\left(\frac{x^3}{3+x}\right)^{\frac{3}{2}}(2x+9)}{2x^4}$. Funkce je opět dobře definovaná pouze pro $x > 0$, kde je derivace vždy záporná. To je vidět z toho, že $y'(0) = -1$ a $y'(x \to \infty) = 0$. Zároveň pokud by existovalo x takové, že $y'(x) = 0$, pak

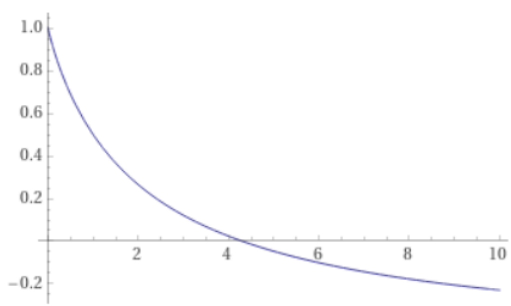
$$\left(\frac{2x^4}{2x+9}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{3+x}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{4x^8}{4x^2+36x+81} = \frac{x^9}{27+27x+27x^2+x^3} \Leftrightarrow$$
$$4(27+27x+27x^2+x^3) = x(4x^2+36x+81) \Leftrightarrow 72x^2+27x+108 = 0,$$

  což nemá reálná řešení.

- $y'' = \frac{27x}{4\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}(x+3)^3} > 0$, tedy funkce je konvexní.
- Limita v nule je triviální. V nekonečnu dá trochu víc práce

$$\lim_{x\to 0} = 1,$$
$$\lim_{x\to\infty} = \lim_{x\to\infty} 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\frac{x^3}{3+x} - x^2}{x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{-3x^2}{(3+x)\left(x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

  S těmito informacemi můžeme načrtnout graf



3 Optimalizace

3.1 Zaměstnanci

(a) Zde je situace snadná. Chceme maximalizovat profit p

$$p = 120\ 000N - 30\ 000N,$$

což uděláme tak, že spočteme jeho derivaci $p' = 120\ 000 - 30\ 000 = 90\ 000 > 0$, tedy profit roste s N. To bylo jasné, protože každý zaměstnanec firmě představuje čistý zisk 90 000 Kč. Je tedy dobré mít těchto zaměstnanců co nejvíc.

(b) Zde je situace zajímavější. Profit spočteme podle

$$p = 120\ 000\sqrt{N} - 30\ 000N,$$

tedy $p' = \frac{120\ 000}{2\sqrt{N}} - 30\ 000$. Extrém bude tam, kde $0 = p' \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{N}} = 1$, neboli $N = 4$. To, že jde o maximum můžeme zjistit pomocí druhé derivace. Profit v tomto maximu tedy je $p = 120\ 000$.

(c) Manager zjevně zvýší produktivitu zbytku, ale je poměrně drahý pro naši reltivně malou firmu. Spočtěme optimální počet zaměstnanců s managerem

$$p = 120\ 000N^{\frac{3}{5}} - 30\ 000N - 200\ 000,$$

neboli $p' = \frac{3}{5}120\ 000N^{-\frac{2}{5}} - 30\ 000$. Najdeme opět maximum pomocí $p' = 0$, což vede na $N = \frac{288}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 9$. Pokud tedy rozšíříme firmu na 9 zaměstnanců + managera, bude profit maximální (opět by se dalo ověřit pomocí druhé derivace). Pokud nyní vyjádříme jeho hornotu, dostaneme $p \approx -21536$ Kč měsíčně. Neboli budeme peníze prodělávat. Efekt, který manager nabízí se stává podstatným teprve pokud $N \gg 1$, tedy pro velké firmy, kde zároveň platí lépe přiblížení z (b).

3.2 Politika

Funkce, kterou uvažujeme pro modelování budoucího počtu nakažených je tkz. logistická funkce a je skutečně dobrým přiblížením v situaci, kdy neuvažujeme, že by se lidi mohli vyléčit.

(a) Zajímá nás situace za půl roku[1], tedy $t = 6$. V takové situaci chceme maximalizovat profit

$$p = \frac{D}{1+\beta^2} - ZI(t=6) = \frac{D}{1+\beta^2} - \frac{ZN}{1+e^{-\beta}}.$$

Odtud spočteme derivaci podle β, což je parametr ve kterém chceme optimalizaci dělat.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{2\beta D}{(1+\beta^2)^2} - \frac{ZNe^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2} = 0.$$

(b) Chceme minimalizovat odpor o k nám, tedy

$$o = I^2 + \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{1}{1+e^{-\beta}} + \beta.$$

Pokud nyní provedeme derivaci

$$\frac{\mathrm{d}o}{\mathrm{d}\beta} = \frac{e^{-\beta}}{(1+e^{-\beta})^2} + 1 > 0.$$

Odpor tedy rostě s tvrdostí opatření. Proto je vidět, že se vyplatí nastavit opatření co nejmenší, tedy $\beta = 0$. Všimněme si, že pro $ZN > 0$ je pro $\beta = 0$ derivace profitu záporná, tedy s vyššími opatřeními klesá i profit. Je tedy možné, že $\beta = 0$ taky maximalizuje profit a pokud bychom si obrázek nechali vykreslit, tak tomu opravdu je

Oba optimalizační problémy neumíme vyřešit přímo. Pokud bychom ale znali všechny použité konstanty, mohli bychom použít jednu z mnoha metod hledání kořenů nelieárních rovnic, kterou nabízí řada různých softwarů.

[1] Určitě by bylo zajímavé studovat něco jako celkový počet nakažených během onoho půl roku, ale zatím neumíme integrovat...

3.3 Plechovka

Známe vzorec pro objem válce $V = \pi r^2 z$, kde r je poloměr základny a z výška válce. Plocha jedné podstavy je πr^2 a plocha válce je $2\pi rz$. tedy celková cena je

$$c = 1 * 2\pi rz + 3 * \pi r^2.$$

Můžeme měnit oba rozměry a tak není jasné, podle čeho derivovat a v čem provádět minimalizaci.

Nevyužili jsme však ještě požadavek, že celkový objem má být fixní. Použitím zvorce výš můžeme vyjádřit např. $z = \frac{V}{\pi r^2}$, což jde dosadit do rovnice pro cenu

$$c = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 3\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 3\pi r^2.$$

Nyní provedem derivaci podle r a hledáme extrém, takže jí položíme rovnu nule

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = -\frac{2V}{r^2} + 6\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}.$$

Lze se snadno přesvědčit, že druhá derivace je kladná a jde tedy o minimum ceny.

Odtud jde snadno určit i optimální výšku plechovky dosazením do vztahu pro objem. Je jasné, že jsme si mohli vybrat i z a provádět optimalizaci v něm. Zkuste si, že výsledek bude stejný.